Métodos Matemáticos de la Física

aceves@astrosen.unam.mx

Tarea # 2

1. (10 PTS.) *Variación de parametros.* LasEDOs de primero orden típicamente se resuelven mediante *factor integrante* o *coeficientes indeterminados*, y aunque relativamente sencillos carecen de generalidad. Resuelva la ecuación de primer orden,

$$y' + p(x)y = q(x)$$

suponiendo que $y(x) = u(x)v(x)$, donde $v(x)$ es la solución a la ecuación homogénea ($q = 0$). Este es el método de variación de parametros debido a Lagrange (1774), y también permite soluciones aproximadas de ciertas EDOs no-lineales (método de Krilov-Bogoliubov).

2. (15 PTS.) *Solución particular a la inhomogénea.* La solución más general a la ecuación diferencial ordinaria lineal

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x)$$

toma la forma

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_p(x)\,;$$

donde $\{y_1, y_2\}$ son soluciones a la ecuación homogénea. Si el Wronskiano $W(y_1, y_2)$ está dado por

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2\,,$$

muestre que la solución particular esta dada por:

$$y_p(x) = y_2 \int \frac{y_1 F}{W(y_1, y_2)}\,\mathrm{d}x - y_1 \int \frac{y_2 F}{W(y_1, y_2)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Nótese que esta solución es explícitamente independiente de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$.

3. (10 PTS.) *Soluciones autosemejantes.*

   - Si $u(x, y) = f(x + i\,y) + g(x - i\,y)$, donde f y g son funciones arbitrarias, verifique entonces que $u(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace bidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

- Si $u(x,y) = f(x-vt+i\,\alpha y)+g(x-vt-i\,\alpha y)$, donde f y g son funciones arbitrarias, verifique entonces que $u(x,y)$ es una solución a la ecuación de onda bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,,$$

siempre y cuando $\alpha^2 = 1 - v/c$.

4. (15 PTS.) *Ecuaciones de Maxwell.* Muestre que las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica clásica,

$$\begin{aligned} \nabla \circ \mathbf{E} &= 4\pi\rho \qquad & \nabla \circ \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,, \end{aligned}$$

que gobiernan el comportamiento de los campos vectoriales eléctricos, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, y magnéticos, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, donde $\rho = \rho(\mathbf{r},t)$ es la densidad escalar de carga y $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ el campo vectorial de corriente, poseen soluciones de la forma:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\,, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}\,,$$

donde el potencial vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ y el escalar $\varphi = \varphi(\mathbf{r},t)$ satisfacen a su vez las ecuaciones de onda inhomogéneas:

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\,, \qquad \nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho\,.$$

Utilize la arbitrariedad que existe al escoger las funciones $\mathbf{A}$ y φ en electrodinámica para arribar a este resultado. [Veáse, e.g., *Classical Electrodynamics* de Jackson.]

5. (10 PTS.) *Ecuación de onda 1D.* Mediante separación de variables muestre que la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\,,$$

tiene soluciones de la forma $\propto \mathrm{e}^{\pm i\alpha(x+ct)}$, donde α es una constante cualesquiera real. Muestre también que soluciones de la forma:

$$\psi(x,t) = \sum_n \left[A_n \cos\frac{n\pi ct}{a} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{a} \right] \sin\frac{n\pi x}{a}\,,$$

donde A_n y B_n son constantes y $\alpha = n$ un entero, satisfacen la ecuación de onda y las condiciones de frontera $\psi(0,t) = 0$ y $\psi(a,t) = 0\ \ \forall t$.

6. (10 PTS.) *Ecuación de Laplace cartesiana en 2D.* Por separación de variables muestre que la ecuación bidimensional de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \ ,$$

tiene soluciones de la forma $\propto \mathrm{e}^{\pm\alpha(x+i\,y)}$, donde α es una constante. Asimismo, muestre que funciones de la forma, con $\alpha = n$ un entero,

$$\varphi(x,y) = \sum_n A_n \, \mathrm{e}^{-n\pi x/a} \, \sin\frac{n\pi y}{a} \ , \qquad \text{con} \qquad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq a \ ,$$

son funciones armónicas planas que satisfacen las condiciones de frontera: $\varphi(x,0) = \varphi(x,a) = 0$ y $\varphi \to 0$ a medida que $x \to \infty$.

7. (10 PTS.) *Ecuación de Laplace en polares.* Muestre que si la ecuación bidimensional de Laplace es transformada a coordenadas polares, i.e. $\{r,\theta\}$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \ ,$$

entonces tiene soluciones de la forma $\propto (r^\nu + r^{-\nu})\mathrm{e}^{\pm i\nu\theta}$, donde ν es una constante cualesquiera real, no necesariamente entera.

8. (10 PTS.) *Ecuación de Bessel.* Muestre que en coordenadas cilíndricas, i.e. $\{r,\phi,z\}$, la ecuación de Laplace tiene soluciones de la forma $\varphi \propto J(r)\,\mathrm{e}^{\pm(\mu z + i\nu\phi)}$, siendo $J(r)$ una solución a la ecuación de Bessel:

$$\frac{d^2 J}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ}{dr} + \left(\mu^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) J = 0 \ ,$$

con μ y ν constantes arbitrarias reales.

9. (10 PTS.) *Ecuación Asociada de Legendre.* Muestre que en coordenadas esféricas, i.e. $\{r,\theta,\phi\}$, la ecuación de Laplace tiene soluciones de la forma

$$\left\{ A r^\nu + \frac{B}{r^\nu} \right\} \Theta(\cos\theta)\, \mathrm{e}^{\pm i\mu\phi} \ ,$$

donde A, B, μ y ν son constantes, y $\Theta(x \equiv \cos\theta)$ satisface la ecuación diferencial:

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left\{ \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2} \right\} \Theta = 0 \ .$$

Argumente el por qué tiene que ser $\mu = m$ un entero si φ es una función real y el rango en que varía $\phi \in [0, 2\pi]$.