Métodos Matemáticos de la Física

aceves@astrosen.unam.mx

Tarea # 3

1. (10 PTS.) *Matrices unitarias y Hermitianas.*

   a) Sea U una matriz unitaria y sean x_1 y x_2 eigenvectores de U pertenecientes a los eigenvalores λ_1 y λ_2, respectivamente. Demuestre que

      1) $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$
      2) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $x_1^\dagger x_2 = \langle x_1 | x_2 \rangle = 0$. [1]

   b) Suponga que las matrices A y B son Hermitianas y que las matrices C y D son unitarias. Demuestre que

      1) $C^{-1}AC$ es Hermitiana
      2) $C^{-1}DC$ es unitaria
      3) $i(AB - BA) \equiv i[A, B]$ es Hermitiana

2. (15 PTS.) *Matrices de Pauli.* Sea S el conjunto de matrices complejas de 2×2.

   a) Demuestre que S forma un espacio vectorial.

   b) Demuestre que una forma de producto interno apropiado está dado por

   $$\langle A|B\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(A^\dagger B)$$

   c) Demuestre que las matrices de espín de Pauli y la unitaria,

   $$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   forman una base ortonormal para este espacio. También muestre, por consecuencia, que cualquier elemento de este espacio vectorial

   $$|A\rangle \rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$

   con los $A_i \in \mathbf{C}$, puede ser expresado en términos de la anterior base ($|A\rangle = a_i|e_i\rangle$) encontrando los a_i's.

[1] El símbolo (†) representa operador adjunto (transpuesto-conjugado); véase Mathews & Walker CAP VI.

3. (10 PTS.) *Producto interno.* Considere el espacio vectorial real de funciones continuas reales, con primera derivada continua, en el intervalo cerrado $[0,1]$ ¿Cuál de las siguientes expresiones define un producto escalar adecuado?

   a)
$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + f(0)g(0)$$

   b)
$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. (15 PTS.) *Transformada de Fourier y operadores de posición y momento.* Considere el operador integral F que actúa sobre todas las funciones integrables cuadráticamente $[L^2(-\infty,+\infty)]$ definido por

$$|g\rangle = F\,|f\rangle \qquad \rightarrow \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikx} f(k)\,\mathrm{d}k$$

   donde F es unitario.

   a) Demuestre que $|\mathrm{e}^{-x^2/2}\rangle$ es un eigenvector de F ¿Cuál es su eigenvalor?

   b) Si X y P son operadores definidos (posición y momento en mecánica cuántica) definidos por

$$X|f\rangle = |xf\rangle$$
$$P|f\rangle = -i|f'\rangle\,,$$

   demuestre que $FX = PF$ y que $FP = -XF$.

5. (20 PTS.) *Funciones de Green.* Considere la ecuación diferencial $u''(x) = a(x)$, donde $x \in (-\infty,+\infty)$ y $a(x)$ es una función conocida de x. Analizando las soluciones a

$$\frac{\mathrm{d}^2G(x,y)}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-y)$$

   Resuelva para $u(x)$ con las CF: $u(0) = u'(0) = 0$. Demuestre que la solución puede ser escrita como

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [H(y) + H(x-y) - 1](x-y)\,a(y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_x^0 (y-x)\,a(y)\,\mathrm{d}y & x \leq 0 \\ \\ \int_0^x (x-y)\,a(y)\,\mathrm{d}y & x \geq 0 \end{cases}$$

   con la funcion de Heavyside unitaria definida como

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[1 + sgn(x)] = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

   La función de Green debe ser continua en $x = y$ y G' discontinua (Mathews & Walker).