Métodos Matemáticos de la Física

Tarea 4

1. *Ecuación de un circuito RC.* La ecuación diferencial que obedece una carga q sobre un capacitor de capacitancia C, conectado en serie con una resistencia R y sujeto a un voltaje

$$V(t) = V_0 \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \mathrm{e}^{-t/\tau} ,$$

es

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = V(t) .$$

Encuentre $q(t)$ si $q(0) = 0$.

2. *Ecuación de Schrödinger.* La ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica para una partícula de masa m en un potencial $V(\mathbf{r})$ está dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r},t) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} .$$

Uno de los problemas más sencillos en cuántica es aquel donde la partícula se encuentra confinada a moverse en una dimensión y en un potencial de paredes infinitas; por ejemplo, en el intervalo $x \in [0, L]$ (véase Figura 1).

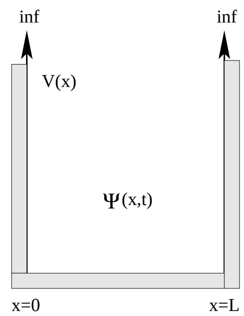

Figura 1: Caja de potencial infinito.

En este caso, se puede tomar $V = 0$ e imponer las condiciones de frontera a la función de onda $\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$. Resuelva la ecuación de Schrödinger bajo las condiciones anteriores mediante separación de variables [*e.g.* $\Psi(\mathbf{r},t) \to \Psi(x,t) = \psi(x)T(t)$]; escoja como constante de separación el escalar E:

$$E = \mathrm{i}\hbar\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} .$$

Determine la expresión para los valores E_n permitidos (*espectro de energías*) por las condiciones de frontera impuestas.

Asimismo, escriba la solución general obtenida para $\Psi(x,t)$. Grafique las primeras dos soluciones (*eigenfunciones*) del problema en $t = 0$; es decir, para valores $n = \{1, 2\}$. Nótese que no existe en este caso el valor $n = 0$.

3. *Operador Sturm-Liouville.* Considere la EDO lineal homogénea en una dimensión

$$Lu = a(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + b(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + c(x)u = 0\,.$$

a) Determine las condiciones que $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ deben satisfacer para que L sea autoadjunto, es decir: $L = L^\dagger$; además de las CF pertinentes.

b) Dado L, muestre que éste puede ser escrito de forma auto-adjunta, en forma de operador diferencial de Sturm-Liouville,

$$L_{SL} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] - q(x)$$

con

$$p(x) = \exp[\int^x \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x]\,, \qquad \text{y} \qquad q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}p(x)$$

c) Escriba en forma auto-adjunta el operador diferencial

$$L = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \left(-\frac{1}{r} + 2r\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + (2 - E)$$

4. *Polinomios de Legendre.* En este problema se pone de manifiesto que los polinomios de Legendre son eigenfunciones de un operador de Sturm-Liouville. Dichos polinonios pueden ser definidos mediante la fórmula de Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l (x^2-1)^l \equiv \frac{1}{2^l l!} f_l^{(l)}(x)\,, \qquad f_l(x) = (x^2-1)^l\,.$$

a.) Compruebe que $(x^2-1)f_l^1(x) = 2lxf_l(x)$

b.) Derive la relación anterior $l+1$ veces, mediante la fórmula de Leibniz, y demuestre que

$$(x^2-1)f_l^{(l+2)}(x) + 2x(l+1)f_l^{(l+1)}(x) + l(l+1)f_l^{(l)}(x) = 2lxf_l^{(l+1)}(x) + 2l(l+1)f_l^{(l)}(x)\,.$$

Si $h(x) = f(x)g(x)$ la fórmula de Leibniz para la l-ésima derivada es

$$h^l(x) = \sum_{k=0}^{l}\left(\begin{array}{c} l \\ k \end{array}\right) f^k(x)\,g^{l-k}(x)\,.$$

c.) Demuestre que la ecuación en el inciso anterior se puede poner de la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P_l(x)}{\mathrm{d}x}\right] = l(l+1)P_l(x)\,.$$

5. *Función de Green.* Considere la EDO inhomogénea

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - l(l+1)u = \delta(x-y)\,.$$

donde $x \in (0,\infty)$, $y > 0$ y $l > 0$ es un entero. Resuelva esta ecuación para las condiciones de frontera homogéneas $u(0) = u(\infty) = 0$.