Métodos Matemáticos de la Física

aceves@astrosen.unam.mx

Tarea # 5

1.) *Operadores Autoadjuntos (AA).* Considere el conjunto de funciones $\{f(x)\}$, de variable real, definidos en el intervalo $x \in (-\infty, +\infty)$, tal que $\rightarrow 0$ tan rápido al menos como $1/x$ a medida que $x \rightarrow \pm\infty$. Determine cuál de los siguientes operadores es AA cuando actúa sobre $\{f(x)\}$:

$$(a) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\,, \qquad (b) \quad -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x^2\,, \qquad (c) \quad ix\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,, \qquad (d) \quad i\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\,.$$

2.) *Expansión en Eigenfunciones.* Encuentre una expansión en eigenfunciones para la solución del problema de frontera de la ecuación inhomogénea

$$Ly = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + k^2 y = f(x)\,, \qquad y(0) = y(\pi) = 0\,,$$

donde k es una constante y

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$$

Recuerde que tiene que resolver primero el problema de eigenvalor $Ly_n = \lambda_n y_n$. Nótese que $L = L^\dagger$, por lo que sus eigenfunciones forman una base.

3.) *Solución por Eigenfunciones.* Encuentre las eigenfunciones normalizadas $y_n(x)$ (i.e., $\langle y_n | y_n \rangle = 1$) y los eigenvalores λ_n del operador L definido por

$$Ly = x^2 y'' + 2xy' + \frac{1}{4} y\,, \qquad x \in [1, e]$$

con condiciones de frontera $y(1) = y(e) = 0$. Encuentre, como una serie de eigenfunciones la solución para el problema inhomogéneo:

$$Ly = \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

[Sugerencia: puede hacer el cambio de variable $x = e^t$ para hacer más manejable la ecuación]