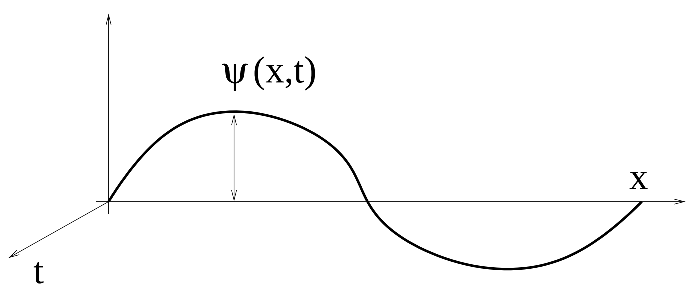
ELECTRODINAMICA CLASICA

Dr. Héctor Aceves
Instituto de Astronomía, UNAM
aceves@astrosen.unam.mx

Tarea # 2

1. **Ecuación de Onda de una Cuerda**. El caso más sencillo que representa un campo quizás lo sea una cuerda unidimensional. Considérese una cuerda de densidad $\rho(x)$ y tensión $\tau(x)$ [módulo de Young], que ejecuta solamente movimientos transversales $\psi(x,t)$.



(a) Demuestre, mediante un análisis de fuerzas, que la ecuación que modela dichos movimientos transversales, en primera aproximación, es

$$\rho(x)\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\tau(x)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right] .$$

Asimismo, que en caso de que $\rho(x)$ y $\tau(x)$ sean constantes se obtiene:

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial^2 t} = 0 \qquad \text{con} \qquad c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} .$$

(b) Demuestre que el Lagrangiano de este campo de fluctuaciones, con ρ y τ constantes, puede ser expresado como

$$L = \frac{\rho}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x - \frac{\tau}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x \equiv \int_0^l \mathcal{L}\,\mathrm{d}x ,$$

$$\mathcal{L}\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial t}, t\right) = \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]$$

donde $\mathcal{L}$ es la densidad lagrangiana, y se han impuesto límites en la región donde ocurren las perturbaciones. Una consecuencia importante de tratar estos sistemas de un número infinito de grados de libertad es que $\mathcal{L}$ depende ahora también de la derivada parcial del campo $\psi(x,t)$ con respecto a x; a diferencia de lo que ocurre con un conjunto de masas puntuales. Físicamente esta derivada espacial resulta de términos que acoplan puntos espaciales vecinos.

2. Ecuaciones de Lagrange. A partir del principio variacional

$$\delta S = \delta \int L \, \mathrm{d}t = \delta \int \int \mathcal{L} \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = 0 \, ,$$

donde S es la acción, demuestre que la ecuación de Euler-Lagrange (en una dimensión), con extremos fijos, resulta ser:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial x)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial t)} \right) = 0 \, .$$

En ocasiones se suele introducir la *derivada funcional*

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial x)} \right) \, ,$$

para expresar las ecuaciones de Lagrange como:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial t)} \right) = 0 \, .$$

Es de resaltar que en este caso, para obtener las ecuaciones de campo, la variación ha sido hecha sobre las coordenadas generalizadas ψ, $\partial \psi / \partial x$ y $\partial \psi / \partial t$; a diferencia de lo que ocurre cuando se quieren las ecuaciones de una partícula donde las variaciones son hechas sobre las coordenadas x y t. Esto mismo ocurre para todo tipo de campo, escalar o vectorial, clásico o cuántico (*cf. Advanced Quantum Mechanics*, Sakurai).

3. Ecuación de Onda. A partir de las ecuaciones de Lagrange para un campo $\psi(x,t)$, con una $\mathcal{L}$ similar a la de una cuerda unidimensional, obtenga la ecuación de su dinámica.

4. Ecuación de Schrödinger. La ecuación de Schrödinger puede ser "obtenida" mediante un lagrangiano. El formalismo es similar al tratamiento de una cuerda. Sin embargo, una de las diferencias es que el campo $\Psi(x,t)$ es complejo; es decir, existen dos variables independiente $\{\mathrm{Re}\Psi, \mathrm{Im}\Psi\}$ ó $\{\Psi, \Psi^*\}$, donde la última representación suele ser más conveniente. Considérese el caso 1-D con una densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2} \left(\Psi^* \dot{\Psi} - \dot{\Psi}^* \Psi \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\mathrm{d}\Psi^*}{\mathrm{d}x} \right) \left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} \right) - \Psi^* V(x) \Psi \, ,$$

donde el punto sobre la variable indica derivada temporal. **(a)** Demueste que la ecuación de Euler-Lagrange para Ψ^* conduce a la ecuación de Schrödinger para Ψ. **(b)** En analogía con el hamiltoneano como

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \, ,$$

el hamiltoneano se forma aquí como

$$H = \int \mathrm{d}x \left\{ \dot{\Psi}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^*} + \dot{\Psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} - \mathcal{L} \right\} \, .$$

A partir de esto, obtenga el hamiltoneano de Schrödinger e indique el resultado en la forma común realizando una integral por partes.

5. **Ecuación de movimiento en forma covariante**. En clase se obtuvó la ecuación de movimiento de una partícula en un campo electromagnético, descomponiendo el 4-vector A_μ en sus componentes tridimensionales $(\varphi, -\mathbf{A})$. Las ecuaciones obtenidas son invariantes ante transformaciones de Lorentz, pero no están expresadas en forma covariante; es decir, no involucra 4-tensores. Al tener una expresión covariante se permite relativamente fácil la transformación a otros sistemas de referencia. Utilizando el Principio Variacional de mínima acción demuestre que la ecuación covariante de movimiento esta dada por

$$m\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\nu$$

siendo u_μ la 4-velocidad, τ el tiempo propio, y $F_{\mu\nu}$ el tensor del campo electromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \; .$$

Recuerde que la acción para el sistema está dada por

$$S = -\int_a^b \left(mc\,\mathrm{d}s + \frac{e}{c}A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu \right) \; ,$$

donde m y e son la masa y carga de la partícula, respectivamente, y c la velocidad de la luz.

6. **Movimiento de una carga en un campo eléctrico uniforme constante**. Demuestre que la ecuación que describe el movimiento relatívista de una partícula cargada e, moviéndose en un campo eléctrico constante $\mathbf{E} = E_x\,\hat{\mathbf{e}}_x$ está dada por

$$x = \frac{mc^2}{eE_x}\cosh\left(\frac{eE_x}{p_0 c}\right) \qquad \text{con} \qquad p_0 = p_x(t=0) \; .$$

Para el caso no-relativista, demuestre que se obtiene el resultado clásico

$$x = \left(\frac{eE_x}{2mv_0^2}\right) y^2 + \text{cte} \; .$$

7. **Movimiento de una carga en un campo magnético uniforme constante**. Analise y discuta el caso del movimiento relativista de una carga e en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_z\,\hat{\mathbf{e}}_z$.

8. **Movimiento de una carga no-relativista en campos cruzados**. Analise y discuta el caso del movimiento de una partícula cargada en el caso en que se encuentre simultáneamente bajo la acción de un campo eléctrico y otro magnético, ambos uniformes y constantes. Los campos tienen la forma $\mathbf{E} = E_y\,\hat{\mathbf{e}}_y + E_z\,\hat{\mathbf{e}}_z$, y $\mathbf{B} = B_z\,\hat{\mathbf{e}}_z$.

9. **Invariante del Campo Electromagnético**. Demuestre, mediante un cálculo directo, que

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \; .$$

Al ser esto un escalar, se torna en uno de los invariantes del campo electromagnético. Nótese que ésto resulta de la "multiplicación" de un tensor covariante por uno contravariante.