ELECTRODINAMICA CLASICA

Dr. Héctor Aceves
Instituto de Astronomía, UNAM
aceves@astrosen.unam.mx

Tarea # 3

1. **Aceleración de una partícula.** Demuestre que la aceleración de una partícula, $\dot{\mathbf{v}}$, que se mueve en un campo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ está dada por

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{\gamma\, m}\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}}{c^2}\,\mathbf{v}\right] .$$

Nótese que la aceleración de la partícula depende del ángulo de su velocidad con respecto al campo $\mathbf{E}$. En otras palabras, las expresiones para la aceleración cuando la partícula se mueve paralela o perpendicular al campo $\mathbf{E}$ son distintas.

2. **Campo de una carga en movimiento constante**. Considérese una sistema de referencia K donde una carga e se encuentra en el origen. Por simplicidad, sólo se considerará un plano XZ. ¿Cuáles son las componentes del campo eléctrico? Considere ahora un sistema K' que se mueve con una velocidad constante v, a lo largo del eje-X. ¿Cuál es la forma del campo eléctrico en este nuevo sistema de referencia? ¿cuál es su magnitud?. Si θ' se utiliza para denotar el ángulo entre el radio r' y la velocidad v, demuestre que la magnitud del campo eléctrico puede ser escrita como:

$$|\mathbf{E}'| = \frac{e}{r'^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\sin^2\theta')^{3/2}} .$$

Verifique que esta expresión se reduce a $|\mathbf{E}'| \approx e/r'^2$ en el caso de velocidades bajas. Describa cualitativamente que ocurre cuando β^2 no es despreciable.

3. **Segundo par de Ecuaciones de Maxwell**. En clase se obtuvó el primer par de ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 .$$

Como se observa, estas ecuaciones no definen de manera completa el comportamiento de los campos eléctrico y magnético. A partir de la acción

$$S = -\frac{1}{c^2}\int A_\mu j^\mu\, \mathrm{d}\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\, \mathrm{d}\Omega , \qquad \mathrm{d}\Omega \equiv c\mathrm{d}t\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z ,$$

donde $j^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$ es la densidad de corriente 4-dimensional, demuestre que se obtiene la siguiente ecuación para la dinámica del campo:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu .$$

Demuestre que esta ecuación conduce a las dos ecuaciones de Maxwell siguientes:

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \qquad \text{y} \qquad \nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho .$$

4. Efecto Bohm-Aharanov. Considerése el siguiente campo magnético, que resulta del análisis de un solenoide:

$$\mathbf{B}(r < R, \theta, z) = B\,\hat{\mathbf{e}}_z \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B}(r > R, \theta, z) = \mathbf{0}\ ,$$

donde R es el radio del solenoide. Nótese que el campo magnético es nulo fuera del mismo. Observe que no existen condiciones de frontera para los potenciales, pero se puede usar la arbitrariedad en la elección de los potencial para escoger $\varphi = 0$ (norma temporal o de Hamilton); es decir, en campo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son descritos solamente por el vector $\mathbf{A}$ en el *gauge* de Hamilton. Demuestre que el potencial vectorial magnético $\mathbf{A}$ dentro y fuera del solenoide están dado por, respectivamente:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}Br\ \hat{\mathbf{e}}_\theta\ , \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{2}\frac{BR^2}{r}\ \hat{\mathbf{e}}_\theta\ .$$

Recuerde que debe haber continuidad en los potencial al pasar la frontera $r = R$. Discuta su resultado y relacionelo con el efecto Bohm-Aharanov que surge en Mecánica Cuántica.[1]

5. La no invariancia de norma de la densidad Lagrangiana. Considérese la densidad Lagrangiana, en forma 3-dimiensional, para el campo electromagnético

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{J} - \rho\varphi\ .$$

Se sabe que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son invariantes ante las transformaciones de norma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\psi \qquad \text{y} \qquad \varphi = \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\ .$$

¿Es un invariante de norma la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$? Lo físicamente aceptable es que la integral de acción

$$S = \int\int \mathcal{L}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\mathrm{d}t$$

sea un invariante de norma, ya que de ésta surgen las ecuaciones de movimiento.

Considérese solamente la parte no-invariante de norma de la densidad Lagrangiana obtenida. Asuma que no hay fuentes o sumideros de campo electromagnético en infinito. Demuestre que la integral de acción resultante que importa, en este caso, es

$$S_{\mathrm{ni}} = \left[\int \rho\psi\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}\right]_{t_1}^{t_2}$$

¿Qué ocurre al tomar la variación de esta integral de acción? Discuta su resultado.

6. Densidad y flujo de energía. Demuestre que en un sistema cerrado, consistente solamente de un campo electromagnético y partículas ligadas a el, se satisface

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}\right) = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} - \nabla\cdot\mathbf{S}\,, \qquad \text{con} \qquad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$$

siendo el vector de Poynting. Asimismo, que en términos integrales se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{r} = -\int \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} - \int \mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}\ ,$$

[1] Véase: Feynmann, R.P. *The Feynmann Lectures in Physics* Vol. 2, §15-5.

y que cuando la integral se extiende por todo el espacio y tenemos un sistema de partículas se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int w\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} + \sum K\right) = 0\ , \qquad \text{donde} \qquad w \equiv \frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2}{8\pi}$$

es la densidad de energía del campo y K la energía cinética de las partículas.

7. **Densidad y flujo de momentum**. El campo electromagnético, además de energía, tiene un momentum asociado. Demuestre que para el sistema formado por corrientes de partículas y campos electromagnéticos, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{P}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} = -\frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2) - (\nabla\mathbf{E})\mathbf{E} - (\nabla\mathbf{B})\mathbf{B}\right]\mathrm{d}^3\mathbf{r} - \int\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{P} = \mathbf{S}/c^2$ es la densidad de momentum, y $\mathbf{S}$ es el vector de Poynting. Nótese que $\mathbf{P}$ es un vector, por lo que los integrandos también lo son. Demuestre que en el caso en que la primera integral, del segundo miembro de la ecuación anterior, se extiende a todo el espacio y se consideran un sistema de partículas discretas se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \mathbf{P}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} + \sum \mathbf{p}\right) = 0\ ,$$

donde $\mathbf{p}$ es el momentum de las partículas cargadas.

Demuestre que en caso en que sólo se considere un volumen finito de campo, se puede escribir la ley de conservación de momentum, en forma de componentes, como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int P_i\mathrm{d}^3\mathbf{r} + \sum p_i\right) = -\int T_{ik}\,\mathrm{d}S_k \qquad \text{donde} \qquad T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2}{2}\delta_{ik} - E_iE_k - B_iB_k\right)$$

es el tensor de maxwelliano de tensión (*Maxwell stress tensor*, en inglés) y S_k la componente k-ésima del área que envuelve el volumen dado. Justifique, asimismo, el hecho de que

$$F_i = \int T_{ik}\,\mathrm{d}S_k$$

se puede considerar la componente k-ésima de la fuerza total en el volumen considerado.

8. **Energía y momentum de ondas planas**. Determine los valores instántaneos de la densidad de energía (w), el flujo de energía por unidad de área ($\mathbf{S}$, o "intensidad"), la densidad de momentum ($\mathbf{P}$), y el tensor de esfuerzos (T_{ik}), para una onda electromagnética plana que se propaga a lo largo del eje-X, dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x-\omega t)}\ \hat{\mathbf{e}}_y \\ \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{E}\ .\end{aligned}$$

El valor de $k_1 = \omega c$ es la magnitud de vector de onda. Verifique que se cumple que

$$|\mathbf{E}\times\mathbf{B}| = E_0^2\ ;$$

de hecho, para una onda plana se cumple $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|$ (en el sistema CGS). Para calcular las cantidades anteriores es conveniente tomar la parte real de los campos electromagnéticos. ¿Cómo se modifican estas cantidades cuando se tiene una onda evanecente ($k_1 = \mathrm{i}\alpha$)?