



ELECTRODINAMICA CLASICA

Dr. Héctor Aceves
Instituto de Astronomía, UNAM
aceves@astro.unam.mx



Tarea # 7

- 1. Aplicaciones Sencillas de la Ley de Ampère.** Utilice la ley de Ampère para encontrar el campo magnético en los siguientes casos:
 - a.) Un cilindro muy largo de radio a lleva una corriente I , la cual está distribuida uniformemente en su interior. Calcule el campo \mathbf{B} dentro y fuera del cilindro.
 - b.) Un solenoide largo de radio a está construido por enrollar un cable alrededor de un cilindro, con N vueltas por unidad de longitud. Si el cable conductor lleva una corriente I , ¿cuál es el campo magnético dentro del solenoide.
- 2. Jackson 5.6.** Un cilindro conductor de radio a tiene un agujero cilíndrico de radio b paralelo al conductor, y a una distancia d del eje del mismo ($d + b < a$); véase Fig. 1. La densidad de corriente está distribuida de manera uniforme en el material restante del cilindro metálico y es paralela al eje del mismo. Utilice la ley de Ampère, y el principio de superposición, para encontrar la magnitud y dirección de la densidad de flujo magnético dentro del agujero.

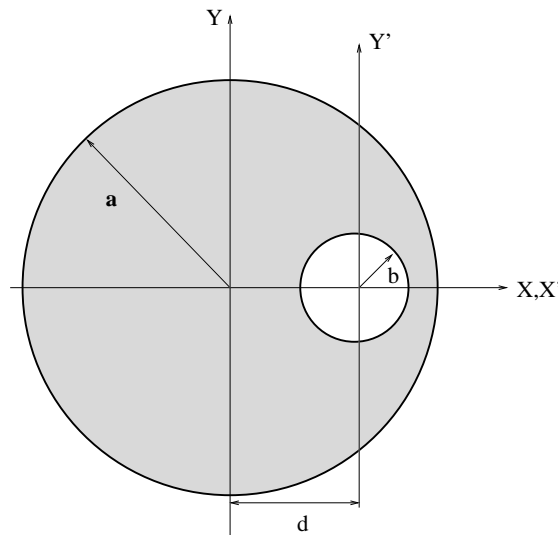


Figura 1. Configuración del sistema para el problema 5.6 del Jackson.

3. **Jackson 5.13.** Una esfera de radio a posee una densidad superficial de carga uniforme σ . La esfera se hace rotar alrededor de un diámetro con velocidad angular constante Ω . Encuentre el potencial vectorial \mathbf{A} y la densidad de flujo magnético dentro y fuera de la esfera. *Ayuda.* Nótese que la densidad de corriente se puede expresar como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = [\sigma \delta(r - a)] \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} .$$

Recuerde la expansión:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) .$$

La $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ resultará en términos de unos ángulos (θ', ϕ') , y utilice la ortogonalidad de los armónicos esféricos. Un resultado, para el potencial vectorial interno, es:

$$\mathbf{A}_{\text{int}} = \frac{4\pi \sigma \Omega a}{c} \frac{r \sin \theta}{3} \hat{\mathbf{e}}_{\phi} .$$

4. **Inducción de Faraday.** Un cable largo se encuentra en el mismo plano que una anillo circular metálico de radio a y resistencia R , y a una distancia $b > a$ del centro del anillo. Se hace pasar una corriente $I(t) = I_0 \cos \omega t$ por el cable recto; véase Fig. 2. Encuentre la fuerza que se ejerce sobre el anillo. En este problema se tendrán que aplicar los conceptos de inductancia mutua y auto-inductancia; aunque se puede suponer que esta última es pequeña en una primera aproximación.

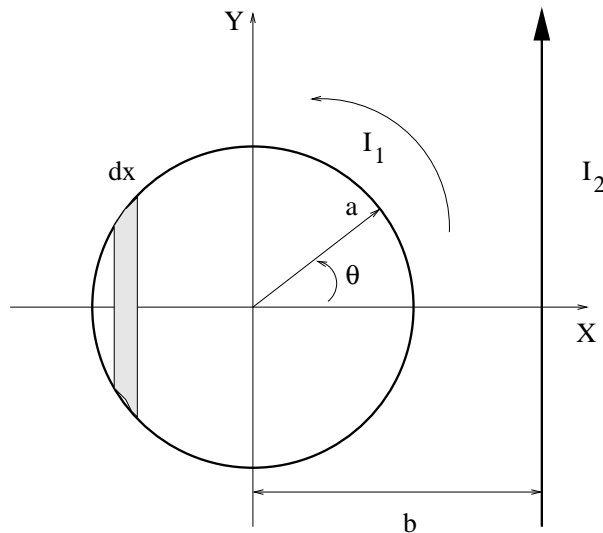


Figura 2. Bosquejo del sistema referido en el Problema 4. Para calcular la corriente inducida I_1 sobre el anillo se requiere encontrar el flujo magnético a través en anillo debido a la corriente I_2 . Se puede utilizar el elemento de área indicado para tal efecto.

5. Paradoja del Disco de Feynman.¹ Considérese el sistema mostrado en la Fig. 3. Se tiene un pequeño solenoide en el centro de un disco (de radio a) hecho de material aislante, el cual produce un momento dipolar magnético $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$. Sin embargo, el disco aislante tiene un anillo en su borde (en $z = 0$) hecho de material conductor que contiene una carga eléctrica Q distribuida uniformemente. A dicho sistema se le permite girar libremente alrededor del eje- Z .

a.) Demuestre que el momento angular inicial del campo electromagnético en la dirección Z es:

$$L_{\text{em},z} = \begin{cases} \frac{2mQ}{15ca} & r < a \\ \frac{13mQ}{15ca} & r > a \end{cases} .$$

b.) Ahora suponga que la corriente en el solenoide se hace disminuir lentamente hasta cero. Calcule el campo inducido en el anillo conductor, y la torca (par) resultante, para demostrar que el momento angular mecánico en la dirección Z es:

$$L_{\text{mec},z} = \frac{mQ}{ca}$$

una vez que el momento magnético se ha desvanecido. De los resultados anteriores se observa que el momento angular del sistema total (campos electromagnéticos y mecánico) se conserva.

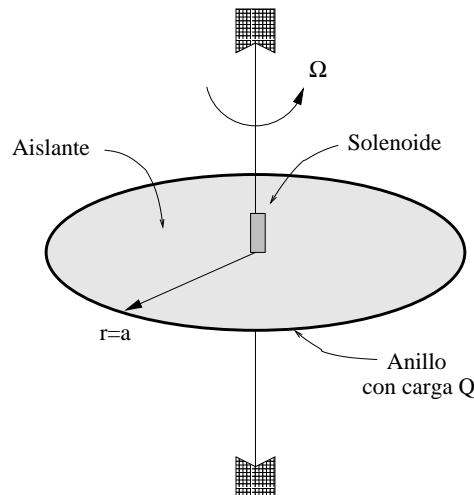


Figura 3. Sistema que trata de representar la configuración presentada por la Paradoja del Disco de Feynman. No se ha mostrado el sistema que hace que el momento dipolar magnético del solenoide decaiga a cero. Esto último hace que cambie el flujo a través del anillo cargado y, por lo tanto, genera un campo eléctrico azimutal sobre el anillo; lo que causa una torca que incrementa el momento angular mecánico. El sistema en general puede girar libremente alrededor del eje- Z con cierta velocidad angular Ω .

¹Se recomienda **enfáticamente** estudiar: *The Feynman's Lectures on Physics*, Vol II §17-4. El problema planteado aquí es análogo al de Feynman; pero como dice Feynman, "el problema no es fácil". Es recomendable también leer los siguientes artículos pertinentes al momento angular en campos electromagnéticos estacionarios:

T.E. Ma. 1986, Am. J. Phys. 54, 949
T. Bahder & J. Sak. 1985, Am. J. Phys. 53, 495
F.L. Boos Jr. 1984, Am. J. Phys. 52, 756
G.G. Lombardi. 1983, Am. J. Phys. 51, 213
E. Corinaldesi. 1980, Am. J. Phys. 48, 83

Ayuda. Para calcular $L_{em,z}$ requerira B_r, B_z, E_r, E_z . Pero si se trabaja en esféricas inicialmente, y luego pasamos a cilíndricas –por la simetría del problema– se tiene que, por ejemplo, $E_z = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta$. También pueden ser de utilidad las siguientes relaciones (Gradshteyn & Ryzhik, 8.731.2 y 8.735.2):

$$P_n(\cos \theta) \cos \theta = \frac{(n+1)P_{n+1}(\cos \theta) + nP_{n-1}(\cos \theta)}{2n+1}$$

$$\begin{aligned} P_n^1(\cos \theta) \sin \theta &= n \cos \theta P_n(\cos \theta) - nP_{n-1}(\cos \theta) \\ &= \frac{n(n+1)}{2n+1} [P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)] \end{aligned}$$

$$P_0(0) = 1, \quad P_2(0) = -\frac{1}{2}, \quad \int_{-1}^{+1} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) d(\cos \theta) = \frac{2 \delta_{mn}}{2n+1}$$