ELECTRODINAMICA CLASICA

Dr. Héctor Aceves
Instituto de Astronomía, UNAM
aceves@astrosen.unam.mx

Tarea # 8

1. Radiación de un Anillo Circular de Corriente. Los campos de radiación obtenidos en clase tienen la siguiente expresión

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{x})\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega \ , \quad \mathbf{E}_\omega(\mathbf{x}) = \frac{i}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{\mathrm{e}^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} \times \int_V \left[\mathbf{J}_\omega(\mathbf{x}') \times \mathbf{k}\right] \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_0)}\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}'$$

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega \ , \quad \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x}) = -\frac{i\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} \int_V \left[\mathbf{J}_\omega(\mathbf{x}') \times \mathbf{k}\right] \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_0)}\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}' \, ,$$

donde la notación es la usual. Cosidérese una "antena" circular de radio a donde circula una densidad de corriente, que puede ser expresada como:

$$\mathbf{J}_\omega = I_0 \cos\varphi'\, \delta(\rho' - a)\, \delta(z')\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi \ ,$$

donde ρ es la coordenada radial en un sistema de coordenadas cilíndricas; véase Fig. 1. Se pide calcular solamente el campo magnético de la radiación emitida; i.e., $\mathbf{B}(t,\mathbf{x})$.

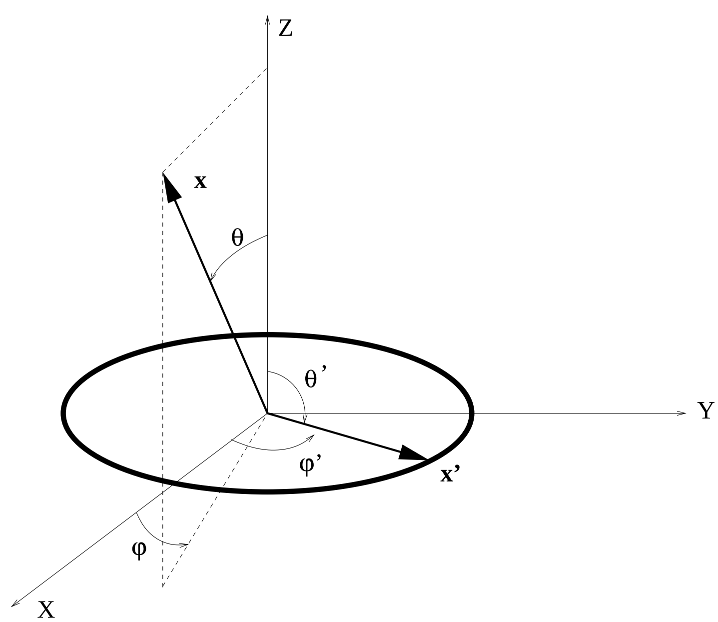

Figura 1. *Antena circular. En un sistema de referencia esférico, el punto* $\mathbf{x} = (r, \theta, \varphi)$ *describe el punto donde se desea el valor de la radiación. En cilíndricas,* $\mathbf{x}' = (\rho', \varphi', z')$ *describe la posición de la fuente (antena).*

Nota. En un momento dado del desarrollo del problema se requerirán integrales de Bessel de la forma:

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)\ , \qquad J_n(-x) = \frac{i^{-n}}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-ix\cos\varphi}\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ix\cos\varphi}\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

La expresión para $\mathbf{B}_\omega$ resulta ser, en coordenadas esféricas,

$$\mathbf{B}_\omega(\mathbf{x}) = -\frac{i\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\left(\mathcal{I}_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \mathcal{I}_\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi\right)$$

donde

$$\mathcal{I}_\theta = I_0 k\pi a\cos\varphi\left[J_0(ka\sin\theta) - J_2(ka\sin\theta)\right]$$
$$\mathcal{I}_\varphi = I_0 k\pi a\cos\theta\sin\varphi\left[J_0(ka\sin\theta) + J_2(ka\sin\theta)\right]\ .$$

Para el campo de radiación magnética resulta ser:

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sin(kr-\omega t')}{r}\left(\mathcal{I}_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \mathcal{I}_\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi\right)\ ,$$

donde t' es el tiempo retardado.

2. Potenciales de Liénard-Wiechert. La derivación de los campos de radiación para el caso de fuentes en movimiento relativo es mucho más complicado que en el caso estacionario; como lo fue el problema anterior. En general, los potenciales electromagnéticos están dados por

$$\varphi(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(t',\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{x}'\ , \qquad \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(t',\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{x}'\ .$$

En este caso se considera una región fuente donde las extensión espacial de las cargas y corrientes están bien localizadas. Demuestre que los potenciales para una carga q que se mueve a una velocidad $\mathbf{v}$ están dados por

$$\varphi(t,\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - (\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot\mathbf{v}/c} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s}$$

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - (\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot\mathbf{v}/c} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\mathbf{v}}{s} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\,\varphi(t,\mathbf{x})$$

donde

$$\begin{aligned} s &= |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot\mathbf{v}}{c} \\ &= |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\left(1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \\ &= (\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right)\ . \end{aligned}$$

Nótese que en notación covariante:

$$A^\mu(x^\mu) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{s}, \frac{\mathbf{v}}{cs}\right) = (\varphi, c\mathbf{A}).$$

3. **Radiación de una carga acelerada.** De acuerdo con el problema anterior, los campos eléctrico y magnético están determinados mediante la derivación de potenciales retardados en el tiempo t y posición $\mathbf{x}$ de "observación". Esto introduce una complicación en su cálculo, ya que los potenciales de Liénard-Wiechert están en términos de coordenadas retardadas $(t', \mathbf{x}')$. Demuestre que el campo eléctrico y magnético de radiación de una carga con movimiento arbitrario están dados por:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{c^2 s^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \dot{\mathbf{v}}]$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \; ;$$

donde

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\mathbf{v}}{c} \; .$$

4. **Bremssthrahlung.** Un caso importante de radiación ocurre cuando la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\dot{\mathbf{v}}$ son colineales; i.e., $\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}} = 0$. Encuentre la distribución angular de la radiación y la potencia total emitida.