PRELIMINARES

Al ingresar al curso de *Métodos Matemáticos de la Física* se presupone que el estudiante ha cursado las materias de: (1) Cálculo en una y varias variables, (2) Álgebra Lineal, (3) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y (4) Variable Compleja. El mínimo requerido para el curso es tener un conocimiento bastante aceptable del material en los textos de Apostol y de Courant & John.

A continuación se expone una serie de problemas que cubren estos temas, y que se espera el estudiante sea capaz de resolver la gran mayoría de ellos. En ciertos casos se han provisto de sugerencias o "respuestas"; las cuales creo que son correctas.

Cálculo Diferencial e Integral I

1. Demuestre por inducción matemática

   a)
   $$\sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad n \in \mathcal{Z}$$

   b)
   $$\sum_1^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad n \in \mathcal{Z}$$

   c)
   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

   donde
   $$\binom{n}{k} \equiv \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

   d) Regla de Leibnitz
   $$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^n(fg)}{\mathrm{d}x^n} &= f\frac{\mathrm{d}^n g}{\mathrm{d}x^n} + \binom{n}{1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^{n-1}g}{\mathrm{d}x^{n-1}} \\ &+ \binom{n}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^{n-2}g}{\mathrm{d}x^{n-2}} + \cdots \\ &+ \binom{n}{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}f}{\mathrm{d}x^{n-1}}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} g \end{aligned}$$

2. Integre por fracciones parciales:

   a)
   $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$$

   b)
   $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x-1)}$$

   c)
   $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$$

3. Derivadas bajo la integral. Encuentre

   a)
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^1 \log(x^2+\alpha^2)\,\mathrm{d}x \quad [\text{Res. } 2\tan^{-1}(1/\alpha)]$$

   b) Muestre que
   $$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x}\,\mathrm{d}x = \log(\alpha+1) \qquad (\alpha > 0)$$

4. Realice las siguientes integrales definidas.

   a)
   $$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ay} - \mathrm{e}^{-by}}{y}\,\mathrm{d}y \qquad [\text{Res. } \ln(b/a)]$$

   b)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x\,, \quad (a>0)$$

   c)
   $$\int_0^\infty \sin bx\,\mathrm{d}x \qquad [\text{Res. } 1/b]$$

   [Sug: use un factor de convergencia y luego remuévalo]

   d)
   $$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{\cos ax\,\mathrm{d}x}{b^2+x^2} \qquad [\text{Res. } \frac{\pi}{2b}\mathrm{e}^{-ab}]$$

   [Sug: considere $\mathcal{I}(a,b)$ y $\partial^2\mathcal{I}/\partial a^2$; resuelva para $\mathcal{I}$]

e)
$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,\mathrm{d}x}{(b^2+x^2)^2}$$

f)
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} \qquad [\text{Res. } \frac{\pi}{2}]$$

g)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} \qquad [\text{Res. } \frac{\pi}{4}]$$

5. Polinomios de Legendre. Si
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)\,,$$
probar:

a)
$$P'_{n+1} = \frac{x^2-1}{2(n+1)}P''_n + \frac{(n+2)x}{n+1}P'_n + \frac{n+2}{2}P_n$$

b)
$$P'_{n+1} = xP'_n + (n+1)P_n$$

c)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)P'_n\right] - n(n+1)P_n = 0$$

d)
$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall m \neq n$$

e)
$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$$

6. Función Gamma. Si
$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{n-1}\,\mathrm{d}x \qquad (n>0)\,,$$
probar:

a)
$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \qquad \forall n > 1$$

b)
$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \forall n \in \mathcal{Z}$$

7. Segunda integral iterada de $f(x)$. Probar que
$$\int_0^x \left[\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)(x-u)\,\mathrm{d}u$$

8. Probar que la n-ésima integral iterada de $f(x)$ es
$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(u)(x-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$$

9. Obtenga los primeros 2 términos del desarrollo de Taylor

   a) $\sin x$
   b) $\cos x$

10. Evalúense las series:

a)
$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}--\cdots \qquad [\text{Res. } 20/17]$$

b)
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)} \qquad [\text{Res. } 3/4]$$

c)
$$\frac{1}{0!}+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\cdots \qquad [\text{Res. } 2\mathrm{e}]$$

11. Considere la integral elíptica
$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad (k^2<1)\,.$$
Desarrollando en serie, encuentre su valor hasta $\mathcal{O}(k^4)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

1. Calcule $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, y $\partial u/\partial z$ para:

   a) $u = xyz + \log xy$
   b) $u = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

2. Muestre que si
$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \to \quad \nabla^2 f = 0$$

3. Sea $z = \mathrm{e}^{xy}$ con $x = \log(u+v)$ y $y = \tan^{-1}(u/v)$. encuentre la expresión para el diferencial total $\mathrm{d}z$.

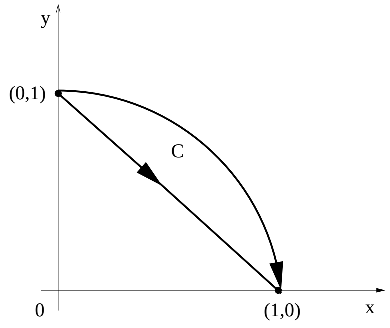

FIGURA 1.

4. Encuentre la derivada direccional para $u(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1)$ en la dirección que hace un ángulo de 30^o con el eje $+x$.

5. Encuentre la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cortada por el cilindro $x^2 - ax + y^2 = 0$. [Res. $4a^2(\pi/2 - 1)$]

6. Evalue la integral $\int_C \mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ donde C es la trayectoria helicoidal

$$\begin{aligned} x &= \cos t\,, \\ y &= \sin t\,, \\ z &= t\,, \end{aligned}$$

[Res. $\pi^2/8$]

7. Calcule el valor de la integral

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,, \qquad \mathbf{v} = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$$

donde C es (1) la línea recta conectando los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$, y (2) el arco de un círculo centrado en el origen; véase Figura 1. [Res. $(1) - 1/2$ $(2) - \pi/4$]

8. Si $\mathbf{v} = 3x^2\mathbf{i} + 5xy^2\mathbf{j} + xyz^3\mathbf{k}$ calcule $\nabla \cdot \mathbf{v}$ en el punto $(1, 2, 3)$ y $\nabla \times \mathbf{v}$.

9. Verifique el *Teorema de la Divergencia* de un campo vectorial

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \mathrm{d}S = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}V$$

para $\mathbf{v} = (x/r)\mathbf{i} + (y/r)\mathbf{j} + (z/r)\mathbf{k}$, donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y la región V es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

10. Enuncie y demuestre el *Teorema de Green* en el plano. Muestre que la siguiente integral es independiente de la trayectoria seguida y que su valor es el indicado:

$$\int_{(0,1)}^{(1,2)} \left[(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x + 2xy\, \mathrm{d}y\right] = \frac{13}{3}$$

11. Demuestre el *Teorema de Stokes*:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \mathrm{d}S = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Evalue $\int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \mathrm{d}S$ sobre la superficie

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \qquad \text{si} \quad \mathbf{v} = 2y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

12. Establezca y demuestre el Teorema de Green en 3D, asi como las Identidades de Green.

Álgebra Lineal

1. Para las matrices M y N dadas por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

encuentre $M+N$, M^T, MN y $[M, N] \equiv MN-NM$.

2. Resuelva el sistema lineal de ecuaciones $MX = C$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

3. Encuentre la *adjunta* $M^\dagger$ de

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}.$$

Es Hermitiana esta matriz?

4. Demuestre que si M es Hermitiana entonces $M_{ii} = M_{ii}^*$; es decir, lo elementos de la diagonal son reales.

5. Demuestre que

$$(MN)^\dagger = N^\dagger M^\dagger\,.$$

Por lo que el producto de dos matrices Hermitianas no es en general Hermitiana a menos que conmuten $[M, N] = 0$.

6. Una matriz *unitaria* satisface

$$UU^\dagger = I = U^\dagger U \ , \quad U^{-1} = U^\dagger \, .$$

Verifique que las siguiente matriz es unitaria.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{cc} 1 & i \\ i & 1 \end{array} \right] .$$

7. Si una matriz es real, entonces se puede definir la *ortogonal* tal que

$$OO^T = I = O^T O \, , \qquad O^{-1} = O^T \, .$$

Verifique que la matriz de rotación R_θ es ortogonal.

$$R_\theta = \left[\begin{array}{cc} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{array} \right]$$

8. Dada una colección de objetos

$$|1\rangle, |2\rangle, \cdots, |V\rangle, \cdots, |W\rangle, \cdots$$

Establezca la definición de *espacio vectorial lineal* y sus propiedades. Al considerar una relación del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i |i\rangle = |0\rangle$$

¿cuándo se dice que el conjunto es linealmente independiente o dependiente? Considere los tres elementos del espacio vectorial de matrices de 2×2

$$|1\rangle = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \ |2\rangle = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \ |3\rangle = \left[\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{array} \right].$$

¿Son estos "vectores" LI o LD?

9. Producto interno. Se pueden asociar vectores columna o fila a cada elemento de un espacio vectorial, de tal manera que

$$|V\rangle \leftrightarrow \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{array} \right] \leftrightarrow [v_1^*, \, v_2^*, \, \cdots, v_n^*] \leftrightarrow \langle V| \, .$$

Si

$$|V\rangle = \sum_i v_i |i\rangle \, , \qquad |W\rangle = \sum_i w_i |j\rangle$$

se tiene entonces que el producto interno esta dado por

$$\begin{aligned} \langle V|W\rangle &= [v_1^*, \, v_2^*, \, \cdots, v_n^*] \left[\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{array} \right] \\ &= \sum_i \sum_j v_i^* w_j \langle i|j\rangle = \sum_i v_i^* w_i \end{aligned}$$

para el caso de una base ortonormal. Dados

$$\begin{aligned} |V\rangle &= (3-4i) \ |1\rangle + (5-6i) \ |2\rangle \\ |W\rangle &= (1-i) \ |1\rangle + (2-3i) \ |2\rangle \end{aligned}$$

calcule $\langle V|V\rangle$, $\langle W|W\rangle$, $\langle V|W\rangle$, $\langle W|V\rangle^*$.

10. Expansión en base ortonormal. Para obtener la componente j-ésima de un vector $|V\rangle$ el proceso es el siguiente

$$\begin{aligned} |V\rangle &= \sum_i v_i |i\rangle \\ \langle j|V\rangle &= \sum_i \langle j|i\rangle = \sum_i v_i \delta_{ij} = v_j \end{aligned}$$

Por lo que se puede escribir

$$|V\rangle = \sum |i\rangle\langle i|V\rangle \ .$$

Considerese el vector

$$|V\rangle = \left[\begin{array}{c} 1+i \\ \sqrt{3}+i \end{array} \right]$$

Expanda este vector en las bases ortonormal $|1\rangle$, $|2\rangle$:

a)

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \ , \qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right] .$$

b)

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \right] \ , \qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -i \end{array} \right] .$$

11. Sea S el conjunto de matrices complejas 2×2. Muestre que ellas forman un espacio vectorial, y que un producto interno apropiado es

$$\langle A|B\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{B}).$$

Determine la dimensión del espacio, y muestre que las matrices de espín de Pauli junto con la matriz unitaria,

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

forman una base ortonormal para el espacio (e.g., $\langle \sigma_x|\sigma_y\rangle = 0$). Para un vector arbitrario

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

donde las A's son complejas, descomponga A en la base anterior.

12. El proceso de Gram-Schmidt permite convertir una base LI a una ortornormal. Describa el proceso de Gram-Schmidt. Dados los vectores

$$|1'\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |2'\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad |3'\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

encuentre la base ortonormal

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

13. Para un operador lineal Ω el problema de eigenvalor es:

$$\Omega|V\rangle = \omega|V\rangle$$

donde $|V\rangle$ es el eigenvector de Ω con eigenvalor ω. En ciertas instancias, como en mecánica cuántica, se suele "nombrar" el eigenvector por su eigenvalor, tal que podemos escribir

$$\Omega|\omega\rangle = \omega|\omega\rangle\,.$$

Considerese el operador

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y la ecuación de eigenvalor es entonces

$$\hat{M}|m\rangle = m|m\rangle\,.$$

Muestre que los eigenvalores y eigenvectores del operador M son:

$$|m=+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |m=-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

14. Dado el operador de rotación

$$\hat{R}_z(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

demuestre que sus eigenvalores y eigenvectores, $\hat{R}_z|r\rangle = r|r\rangle$, están dados por:

$$|r=1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad |r=i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$|r=-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

15. ¿Qué es una forma cuadrática? Escriba la forma cuadrática $Q(x)$ asociada a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determine una matriz ortogonal O para la matriz real hermiteana A y encuentre la forma diagonal correspondiente [Res: $Q(y) = y_1^2 + 6y_2^2$]. Provea de una interpretación geométrica al problema.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Encuentre las soluciones generales de:

   a)
   $$x^2y' + y^2 = xyy'$$

   b)
   $$y' = \frac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$$

c)

$$y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$$

d)

$$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

e)

$$(1-x^2)y' - xy = xy^2 \qquad [\text{Sug. } z = 1/y]$$

f)

$$2x^3y' = 1 + \sqrt{1+4x^2y} \qquad [\text{Sug. } u = x^2y]$$

g)

$$y'' + y'^2 + 1 = 0$$

h) Por series:

$$x(1-x)y'' + 4y' + 2y = 0$$

i) Por series:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

j)

$$yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0 \qquad [\text{Sug. } (y'/y)' = ?]$$

k)

$$x^4yy'' + x^4y'^2 + 3x^3yy' = 1 \qquad [\text{Sug. } t = yy']$$

2. En la activación de una laminilla de Indium por un flujo constante de neutrones lentos, el número N de átomos radioactivos generados obedece la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N_s - \lambda N \ ,$$

donde N_s es la constante de "saturación". Encuentre $N(t)$ si $N(0) = 0$.

3. Encuentre la solución general de

$$A(x)y'' + A'(x)y' + \frac{y}{A(x)} = 0$$

donde $A(x)$ es una función conocida y $y(x)$ desconocida. [Sugerencia: escriba la ecuación en términos de $u(x) = \int^x \mathrm{d}t/A(t)$ para arribar a una ecuación tipo oscilador armónico para $y(u)$; o separe el problema en dos ecuaciones y proponga una solución para cada una.]

4. Encuentre la solución general de

$$xy'' + 2y' + n^2xy = \sin\omega x\,.$$

Sugerencia: elimine el término de la primera derivada mediante un cambio de variable.

5. Notese que $y = x$ seria una solución de

$$(1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2$$

si el término de la derecha fuera cero. Con esta información, encuentre la solución general de la ecuación anterior.

Variable Compleja

1. Encuentre y gráfique las raíces de $z^n = 1$ ($n = 2, 3, 4$)
2. Expanda hasta tercer orden
   a) $\mathrm{e}^z \sin z$
   b) $\sin z \cos z$
3. Muestre que $\quad \cos z = (\mathrm{e}^{i\,z} + \mathrm{e}^{-i\,z})/2$
4. Los Polinomios de Legendre pueden ser definidos como los coeficientes $P_n(x)$ de la expansión en serie de

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + P_1(x)z + P_2(x)z^2 + \cdots\,.$$

Encuentre los primeros 3 polinomios de Legendre.

5. Encuentre la integral

$$\int_\gamma z\mathrm{e}^{z^2}\,\mathrm{d}z$$

siendo γ la trayectoria de i hasta $-i+2$

6. Encuentre la serie de Laurent para:

a)

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

b)

$$f(z) = \frac{z}{1+z^3}$$

tanto en potencias positivas como negativas, especificando el rango de validez de la expansión.

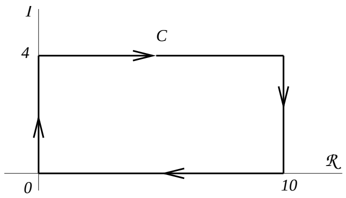

FIGURA 2.

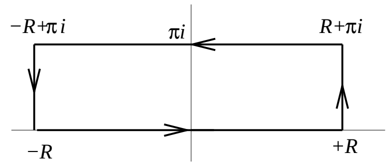

FIGURA 3.

7. Encuentre los residuos de

   a) $f(z) = \sin z$ en $z = \pi$

   b) $f(z) = z^2/(z^2-1)$ en $z = 1$

8. Encuentre el residuo de $1/(z^4-1)$ en i, y evalue la integral
$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^4-1} \qquad [\text{Res. } -\frac{\pi}{2}]$$
siendo C un círculo de radio 1/2 aredor de i.

9. Encuentre el valor de la integral
$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-3z+5} \qquad [\text{Res. } -\frac{2\pi}{\sqrt{11}}]$$
en el contorno C de la Figura 2

10. Determine los polos y residuos de $1/\sin z$ y encuentre
$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\sin z} \qquad [\text{Res. } 2\pi i]$$
donde C es un círculo de radio 8.

11. Integrales de Contorno:

   a)
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} \qquad [\text{Res. } \frac{\pi}{2\sqrt{2}}]$$
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin \pi/n} \quad (n \geq 2)$$

   b)
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad [\text{Res. } \frac{\pi}{2}]$$

   c)
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad [\text{Res. } \frac{\pi}{2}]$$

   d)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\,\omega t}\,\mathrm{d}\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$$
[Sug: poner polos "arribita" del eje real]

   e)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} \qquad [\text{Res. } \frac{\pi}{2\sqrt{2a}}]$$

   f)
$$\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{(a^2+r^2)^3} \qquad [\text{Res. } \frac{\pi^2}{4a^3}]$$
[Sug: pasar a coordenadas esféricas]

   g)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(a+bx)} \quad (a > b > 0)$$
[Res: $\pi/\sqrt{a^2-b^2}$]

   h)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta} \qquad [\text{Res. } \frac{2\pi}{a+\sqrt{a^2-b^2}}]$$

   i) Muestre que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\ \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}^{\pi/2}+\mathrm{e}^{-\pi/2}}$$
usando el contorno de la Figura 3.