Edo's Elementales

a) $y' = x^3 y^2$ con $y(2) = 1$

$\frac{dy}{dx} = x^3 y^2 \qquad \int \frac{dy}{y^2} = \int x^3 dx$

$-\frac{1}{y} = \frac{1}{4}x^4 + c \rightarrow \boxed{y = -\frac{4}{x^4+4c}}$

Como $y(2)=1 \rightarrow 1 = -\frac{4}{16+4c}$

$\rightarrow c = -5$

$\therefore \boxed{y(x) = -\frac{4}{x^4-20}}$

b) $x\frac{dy}{dx} - xy = y$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x+1}{x} dx$

$\ln y = \ln x + x + \ln c$

$y = e^{\ln x + x + \ln c}$

$\boxed{y = c x e^{x}}$

con $y(2)=1 \rightarrow 1 = 2ce^2$

$c = \frac{1}{2e^2}$

$\therefore \boxed{y(x) = \frac{1}{2} x e^{x-2}}$

c) $\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

$\int \frac{dy}{y^2} = -2\int x\,dx$

$-\frac{1}{y} = -x^2 + c \rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{x^2 - c}}$

Si $y(2)=1 \rightarrow 1 = \frac{1}{4-c}$

$\rightarrow c = 3 \quad \therefore \boxed{y = \frac{1}{x^2-3}}$

d) $x\frac{dy}{dx} = y^2 + y$

$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \ln y - \ln(y+1) = + \underbrace{\ln c}_{cte} + \ln x$

$\ln \frac{y}{y+1} = \ln x + \ln c$

$\rightarrow \frac{y}{y+1} = cx \rightarrow \boxed{y = \frac{cx}{1-cx}}$

con $y(2)=1 \rightarrow 1 = \frac{2c}{1-2c}$

$\rightarrow c = \frac{1}{4} \quad \therefore \boxed{y = \frac{x}{4-x}}$

Población de Bacterias

Sea a constante asociada a nacimientos; $a > 0$
y sea b la asociada a muertes $(b>0)$

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 = N(a-bN)$$

$$\int \frac{dN}{N(a-bN)} = \int dt \rightarrow \int\left[\frac{1}{N} + \frac{b}{a(1-\frac{a}{b}N)}\right]dN = \int a\,dt$$

$$at = \ln N - \ln\left(1-\frac{b}{a}N\right) \rightarrow \quad Ce^{at} = \frac{N}{1-\frac{b}{a}N}$$

de donde
$$N(t) = \frac{a}{b+\frac{a}{c}e^{-at}} \quad ó \quad N(t) = \frac{ac}{bc+ae^{-at}}$$

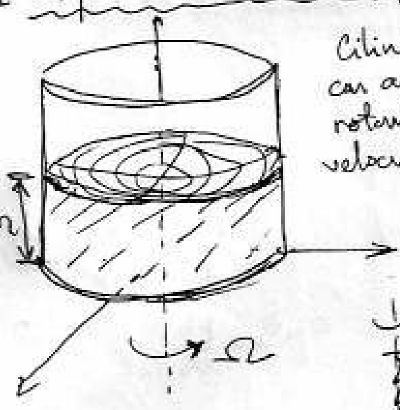
Con C la constante a determinar...

$$N(0)=N_0 \rightarrow N_0 = \frac{a}{b+\frac{a}{c}} \rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{N_0} - \frac{b}{a}$$

$$\therefore \quad N(t) = \frac{a}{b+\left(\frac{a}{N_0}-b\right)e^{-at}}$$

- Cuando $t \to \infty$ $\quad e^{-at} \to 0 \Rightarrow N \to \frac{a}{b}$
- Si $b = 0 \rightarrow N = N_0 e^{at}$ y $N \to \infty$ para $t \to \infty$

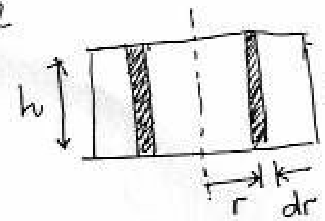
1 El problema de la centrífuga



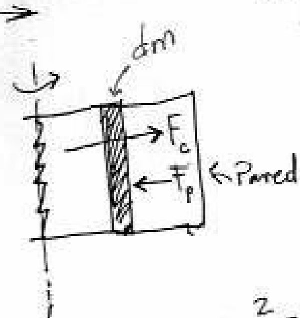
Cilindro con agua rotando a una velocidad angular Ω

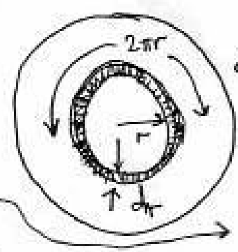
$\Omega = cte.$

∴ existe un equilibrio de presiones



← vista de lado





← Vista de "arriba"

la fuerza centrípeta sobre el elemento de fluido es:

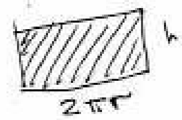
$$F_c = 2\pi\rho h r dr \cdot \Omega^2 r \quad \sim \underbrace{\text{masa}}_{(dm)} \cdot \Omega^2 r$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \rho \cdot A \cdot h \\ m = \rho \cdot \pi r^2 h \\ dm = 2\pi r h \rho \cdot dr \end{array} \right.$$

la fuerza que equilibra es debida a un elemento de presión

$\left\{ F \approx \text{Presión} \cdot \text{Área} \right.$

Área →



es: $F_p = 2\pi r h dP$

Tenemos entonces que $\quad 2\pi r h dP = 2\pi r h \rho \Omega^2 r dr$

$$\boxed{dP = \rho \Omega^2 r dr}$$

(a) Si $\rho = cte$

$$\int dP = \rho\Omega^2 \int r dr \implies \boxed{P = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 + P_o}$$

(b) Si $P = \rho c^2 \longrightarrow \rho = \frac{P}{c^2}$ $\qquad \frac{dP}{P} = \frac{\Omega^2}{c^2} r dr$

$$\ln P = \frac{\Omega^2}{c^2} r^2 + c' \implies \boxed{P = P_o e^{\Omega^2 r^2 / c^2}}$$

④ SAL DISOLVIÉNDOSE EN AGUA. Cuando x_0 gramos de sal son colocados en M gramos de agua al tiempo $t=0$, ¿Cuántos gramos permanecerán sin disolver al tiempo t? La tasa de solución dx/dt es proporcional al número de gramos x de sustancia sin disolver al tiempo t y a la diferencia entre la concentración de saturación, X/M y la concentración actual, $(x_0-x)/M$. X es el número de gramos de sal que producirían saturación.

$x(t=0)=x_0$ x: gramos de sal sin disolver

$$\frac{dx}{dt}=kx\left(\frac{X}{M}-\frac{x_0-x}{M}\right)=\frac{k}{M}x\left(X-x_0+x\right)$$

$$\frac{dx}{x(X-x_0+x)}=\frac{k}{M}dt$$

$$\frac{1}{x(X-x_0+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{X-x_0+x} \quad A=-B=\frac{1}{X-x_0}$$

$$\frac{1}{X-x_0}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{X-x_0+x}\right)dx=\frac{k}{M}t+C$$

$$\frac{1}{X-x_0}\ln\left(\frac{x}{X-x_0+x}\right)=\frac{k}{M}t+C$$

$$\frac{x}{X-x_0+x}=Ae^{\frac{k(X-x_0)}{M}t}$$

$$x\left(1-Ae^{\frac{k(X-x_0)}{M}t}\right)=Ae^{\frac{k(X-x_0)}{M}t}(X-x_0)$$

$$\boxed{x=\frac{Ae^{\frac{k(X-x_0)}{M}t}(X-x_0)}{1-Ae^{\frac{k(X-x_0)}{M}t}}}$$

✓

$$x = \frac{A e^{\frac{k(X-x_0)}{M}t}\,(X-x_0)}{1 - A e^{\frac{k(X-x_0)}{M}t}}$$

Si $x(0) = x_0 \Rightarrow$

$$x_0 = \frac{A(X-x_0)}{1-A}$$

$$A\left(x_0 + (X-x_0)\right) = x_0$$

$$\boxed{A = \frac{x_0}{X}}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{\frac{(X-x_0)\,x_0}{X}\, e^{\frac{k(X-x_0)}{M}t}}{1 - \frac{x_0}{X}\, e^{\frac{k(X-x_0)}{M}t}}}$$

(9) DECAIMIENTO RADIACTIVO DE SUSTANCIAS MADRES E HIJAS

$$\frac{dA}{dt} = \lambda_A A$$
$$\frac{dB}{dt} = -\lambda_B B + \lambda_A A$$

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda_A A \Rightarrow A = A_0 e^{-\lambda_A t}$$

$$\frac{dB}{dt} = -\lambda_B B + \lambda_A A$$

$$\frac{dB}{dt} = -\lambda_B B + \lambda_A A_0 e^{-\lambda_A t}$$

$$\frac{dB}{dt} + \lambda_B B = \lambda_A A_0 e^{-\lambda_A t}$$

$$\frac{dB}{dt} + \lambda_B B = \lambda_A A_0 e^{-\lambda_A t}$$

$$\mu(t) = e^{\int \lambda_B dt} = e^{\lambda_B t}$$

$$B(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \lambda_A A_0 e^{-\lambda_A t} \mu(t)\, dt$$

$$B(t) = e^{-\lambda_B t} \int \lambda_A A_0 e^{-\lambda_A t} e^{\lambda_B t} dt$$

$$B(t) = e^{-\lambda_B t} \lambda_A A_0 \int e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} dt$$

$$B(t) = e^{-\lambda_B t} \left(\frac{\lambda_A A_0}{\lambda_B - \lambda_A}\right) e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} + C e^{-\lambda_B t}$$

$$\boxed{B(t) = e^{-\lambda_A t} \left(\frac{\lambda_A A_0}{\lambda_B - \lambda_A}\right) + C e^{-\lambda_B t}}$$

✓

(11) Oscilaciones armónicas amortiguadas

La ecuación diferencial a resolver es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \qquad \text{con} \quad b = \frac{\ell}{2m}$$

$$\text{y} \quad y(0) = y_0 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_0 = 0$$

Si $y = e^{mx}$ (ansatz) $\Rightarrow$

$$m^2\cancel{y} + 2bm\cancel{y} + \omega^2\cancel{y} = 0$$

$$m^2 + 2bm + \omega^2 = 0$$

$$m = -b \pm \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 4\omega^2}$$

$$m = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

(a) Si $b > \omega \Rightarrow m = -b \pm \sqrt{b^2-\omega^2}$ genera dos raíces reales distintas y la solución de la ec. diferencial es de la forma

$$y = e^{-bt}\left(A e^{\sqrt{b^2-\omega^2}\,t} + B e^{-\sqrt{b^2-\omega^2}\,t}\right)$$

$$y(0) = A + B = y_0$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_0 = \left[-b e^{-bt}\left(A e^{\sqrt{b^2-\omega^2}\,t} + B e^{-\sqrt{b^2+\omega^2}\,t}\right) + \sqrt{b^2-\omega^2}\, e^{-bt}\left(A e^{\sqrt{b^2-\omega^2}\,t} - B e^{-\sqrt{b^2-\omega^2}\,t}\right.\right.$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_0 = -b(A+B) + \sqrt{b^2-\omega^2}\,(A-B) = 0$$

$$-by_0 + \sqrt{b^2-\omega^2}\,(A-B) = 0$$

$$A - B = \frac{by_0}{\sqrt{b^2-\omega^2}}$$

$$A = \frac{y_0}{2}\left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2-\omega^2}}\right)$$

$$B = \frac{y_0}{2}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2-\omega^2}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{y = \frac{y_0}{2} e^{-bt}\left(\left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2-\omega^2}}\right) e^{\sqrt{b^2-\omega^2}\,t} + \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2-\omega^2}}\right) e^{-\sqrt{b^2-\omega^2}\,t}\right)}$$

(b) Si $b = \omega \Rightarrow m = -b$ y la solución es 11

$$y = e^{-bt}(A + Bt)$$

$$y(0) = \underline{A = y_0}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_0 = \left[-b e^{-bt}(A + Bt) + B e^{-bt}\right]\Big|_0 = 0$$

$$-bA + B = 0 \quad \Big\rangle \quad \underline{B = b y_0}$$

$$\boxed{y = y_0 e^{-bt}\left(1 + bt\right)}$$

(c) Si $b < \omega \Rightarrow m = -b \pm i\sqrt{\omega^2 - b^2}$ y la solución es

$$y = e^{-bt}\left(A\cos\left(t\sqrt{\omega^2-b^2}\right) + B\,\mathrm{sen}\left(t\sqrt{\omega^2-b^2}\right)\right)$$

$$y(0) = \underline{A = y_0}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_0 = \left[-b e^{-bt}\left(A\cos(t\sqrt{\ }) + B\,\mathrm{sen}(t\sqrt{\ })\right) + \sqrt{\ }\, e^{-bt}\left(-A\,\mathrm{sen}(t\sqrt{\ }) + B\cos(t\sqrt{\ })\right)\right]\Big|_0$$

$$= -bA + \sqrt{\omega^2-b^2}\,B = 0$$

$$-b y_0 + \sqrt{\omega^2-b^2}\,B = 0 \quad \Big\rangle \quad \underline{B = \frac{b y_0}{\sqrt{\omega^2-b^2}}}$$

$$\boxed{y = y_0 e^{-bt}\left(\cos\left(t\sqrt{\omega^2-b^2}\right) + \frac{b}{\sqrt{\omega^2-b^2}}\,\mathrm{sen}\left(t\sqrt{\omega^2-b^2}\right)\right)}$$

✓

J.A.

$\boxed{\text{Oscilador Armónico Forzado}}$ $\boxed{\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = A \sin \Omega t}$

La solución particular, con la fuente $A \sin \Omega t$, se puede obtener mediante "coeficientes indeterminados" (planteando una solución). Aquí la resolvemos mediante otro método [ver Nota anexa]

La solución particular es

$$y_p(x) = \frac{1}{r_1 - r_2}\left[e^{r_1 x} \int e^{-r_1 x} f(x)\, dx - e^{r_2 x} \int e^{-r_1 x} f(x)\, dx \right]$$

con (r_1, r_2) las raíces de la ecuación homogénea correspondiente.

$$(r_1, r_2) = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2} = -b \pm R \qquad R \equiv \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

Entonces $$y_p = \frac{e^{-(b+R)t}}{2R} \int e^{(b-R)t} A \sin \Omega t\, dt - \frac{e^{-(b+R)t}}{2R} \int e^{(b+R)t} A \sin \Omega t\, dt$$

Usando $$\int e^{at} \sin bt\, dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2}(a \sin bt - b \cos bt)$$

y colectando términos:

$$y_p(x) = \frac{A}{2R}\left[\frac{b-R}{(b-R)^2 + \Omega^2} - \frac{b+R}{(b+R)^2 + \Omega^2} \right] \sin \Omega t$$

$$- \frac{A}{2R}\left[\frac{\Omega}{(b-R)^2 + \Omega^2} - \frac{\Omega}{(b+R)^2 + \Omega^2} \right] \cos \Omega t \, ,$$

$$y_p(x) = \frac{A}{(\omega^2 - \Omega^2) + 4\Omega^2 b^2}\left[(\omega^2 - \Omega^2) \sin \Omega t - 2b\Omega \cos \Omega t \right]$$

H.A

La solución complementaria es:

$$\underbrace{y_c(x) = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}}$$

$$\boxed{y_c(x) = e^{-bt}\left(A_1 e^{Rt} + A_2 e^{-Rt}\right)}$$

Nótese que $y_c(x)$ decae... tarde o temprano!

La amplitud de la $y_p(x)$ es $\dfrac{A}{(\omega^2-\Omega^2)+4\Omega^2 b^2} = AMP$

que adquiere un máximo cuando $\boxed{\Omega^2 = \omega^2 - 2b^2}$

que es la condición de RESONANCIA.

Nótese que la disipación $(b>0)$ evita una catástrofe resonante si $\Omega = \omega$

* p.d: se utilizo mathematica para simplificar cierta álgebra

1.1. Ecuaciones No-homogéneas: Coeficientes Constantes

Método de Operadores

Supongamos que $\{r_1, r_2\}$ son las raíces de la ecuación auxiliar del problema homogéneo asociado a la ecuación

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_2\, y = f(x)\ .} \tag{1.1}$$

Entonces podemos escribir la ecuación heterogénea, utilizando los operadores diferenciales D como si fueran algebraicos:

$$(D^2 + a_1 D + a_2)y = (D - r_1)(D - r_2)y = f(x)\,. \tag{1.2}$$

Ahora hagamos el cambio de variable

$$(D - r_2)y \equiv u(x) \;\Rightarrow\; (D - r_1)u(x) = f(x)\,. \tag{1.3}$$

Es decir, se ha transformado la ecuación de segundo orden para $y(x)$ en una de primer orden para $u(x)$, la cual podemos resolver -por ejemplo- por *factor integrante* $\lambda(x)$ [*cf.* Matthews & Walker]. Encontramos primero.

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= \mathrm{e}^{[\int^x (-r_1)\,\mathrm{d}x']} = \mathrm{e}^{-r_1 x} \qquad \Longrightarrow \\
u(x) &= \lambda^{-1}(x)\left[\int^x \lambda(x')\, f(x')\,\mathrm{d}x' + A_1\right] = \mathrm{e}^{r_1 x}\left[\int^x \mathrm{e}^{-r_1 x'} f(x')\,\mathrm{d}x' + A_1\right] \\
&= \mathrm{e}^{r_1 x}\,[\,\psi(x) + A_1]\ , \quad \text{con} \\
\psi(x) &\equiv \int^x \mathrm{e}^{-r_1 x'} f(x')\,\mathrm{d}x'\ .
\end{aligned} \tag{1.4}$$

De (1.3) tenemos que

$$(D - r_2)y(x) = u(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}\,[\,\psi(x) + A_1]\ .$$

Esta es otra ecuación diferencial de primer orden, la cual puede ser resuelta nuevamente por factor integrante. Tenemos pues que

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathrm{e}^{r_2 x}\left[\int^x \mathrm{e}^{(r_1 - r_2)x'}\,[\,\psi(x') + A_1]\,\mathrm{d}x' + A_2\right] \\
&= \mathrm{e}^{r_2 x}\int^x \mathrm{e}^{(r_1 - r_2)x'}\psi(x')\,\mathrm{d}x' + \mathrm{e}^{r_2 x} A_1 \int^x \mathrm{e}^{(r_1 - r_2)x'}\,\mathrm{d}x' + A_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \\
&= \mathrm{e}^{r_2 x}\int^x \mathrm{e}^{(r_1 - r_2)x'}\psi(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{A_1}{r_1 - r_2}\mathrm{e}^{r_1 x} + A_2 \mathrm{e}^{r_2 x}\ .
\end{aligned}$$

Aquí estamos suponiendo que $r_1 \neq r_2$, de tal manera que exista la "amplitud" de $\mathrm{e}^{r_1 x}$; se observará que no importa que valor numérico se escoja para r_1 ó r_2 ya que las constantes de integración son finalmente determinadas por las condiciones de frontera del problema. Esta ecuación la podemos escribir, redefiniendo la constante A_1, como

$$y(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}\int^x \mathrm{e}^{(r_1 - r_2)x'}\psi(x')\,\mathrm{d}x' + [A_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + A_2 \mathrm{e}^{r_2 x}]\ . \tag{1.5}$$

Nótese que esta solución es de la forma $y(x) = y_{\mathrm{c}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$, estando y_{c} relacionada con la función ψ y ésta con la función "fuente" $f(x)$ de la ecuación heterogénea (1.1).

Escribamos de manera explícita la solución particular $y_{\rm p}(x)$ de la ecuación (1.5) en términos de la fuente de heterogeneidad $f(x)$. Realizando la integral por partes

$$\int^x \mathrm{e}^{(r_1-r_2)x'}\psi(x')\,\mathrm{d}x' \;=\; \frac{\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}}{r_1-r_2}\psi(x) - \int^x \frac{\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x'}}{r_1-r_2}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x'}\,\mathrm{d}x'\,.$$

Tenemos que de la ecuación (1.4) se sigue que $\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-r_1 x}f(x)$, por lo que tendremos

$$\int^x \mathrm{e}^{(r_1-r_2)x'}\psi(x')\,\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}}{r_1-r_2}\int^x \mathrm{e}^{-r_1x'}f(x')\,\mathrm{d}x' - \int^x \frac{\mathrm{e}^{-r_2x'}}{r_1-r_2}f(x')\,\mathrm{d}x'\,,$$

nótese que al insertarse dentro de la integral $\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}x$ se debe cambiar $x \to x'$ para tener consistencia con la notación utilizada. Sustituyendo este resultado en (1.5) tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{r_1-r_2}\left[\mathrm{e}^{r_1x}\int^x \mathrm{e}^{-r_1x'}f(x')\,\mathrm{d}x' - \,\mathrm{e}^{r_2x}\int^x \mathrm{e}^{-r_2x'}f(x')\,\mathrm{d}x'\right] + [A_1\mathrm{e}^{r_1x} + A_2\mathrm{e}^{r_2x}] \\ &= \frac{1}{r_1-r_2}\left[\int^x \mathrm{e}^{r_1(x-x')}f(x')\,\mathrm{d}x' - \int^x \mathrm{e}^{r_2(x-x')}f(x')\,\mathrm{d}x'\right] + [A_1\mathrm{e}^{r_1x} + A_2\mathrm{e}^{r_2x}]\ . \end{aligned}$$

Esta ecuación la podemos escribir como:

$$\boxed{y = \int^x \left[K_1(x,x') + K_2(x,x')\right] f(x')\ \mathrm{d}x' + [\,A_1\mathrm{e}^{r_1x} + A_2\mathrm{e}^{r_2x}\,]} \qquad (1.6)$$

donde

$$\left[\begin{array}{c} K_1(x,x') \\ K_2(x,x') \end{array}\right] = \frac{1}{r_1-r_2}\left[\begin{array}{c} +\,\mathrm{e}^{r_1(x-x')} \\ -\,\mathrm{e}^{r_2(x-x')} \end{array}\right]\ .$$

Se observa que las funciones K_1 y K_2 dependen *solamente* de la estructura de la parte homogénea de la ecuación diferencial (1.1), y se suelen denominar el *kernel* de la ecuación heterogénea.

Así pues, para cualquier ecuación diferencial lineal heterogénea con coeficientes constantes (1.1) podemos encontrar su solución mediante la fórmula (1.6), donde $\{r_1, r_2\}$ son las raíces del polinomio asociado a la ecuación homogéna, quedando sólo por determinar A_1 y A_2 con las condiciones iniciales del problema. En otras palabras, una vez determinadas $\{r_1, r_2\}$ podemos encontrar una solución para distintas fuentes $f(x)$ sin tener que resolver la ecuación cada vez. Posteriormente veremos que esta forma de solución guarda una relación estrecha con el método de función de Green.