# Métodos Matemáticos de la Física

aceves@astrosen.unam.mx

## Tarea # 1

1. (10 PTS.) *Ecuaciones diferenciales elementales.* Encuentre la solución general de cada una de las siguientes EDOs, y luego la solución particular con la condición $y(2) = 1$:

   a) $y' = x^3 y^2$
   b) $xy' - xy = y$
   c) $y' + 2xy^2 = 0$
   d) $xy' = y^2 + y$

2. (10 PTS.) *Población de bacterias.* Las colonias bacteriales que viven en un medio nutritivo crecen a una tasa proporcional al número de bacterias presente en cualquier momento. Sin embargo, su tasa de muerte es proporcional al cuadrado de la población. Si $N(t)$ denota el número de bacterias presente a un tiempo $t$, y se tiene que $N(0) = N_0$, encuentre el número de bacterias en una población como función del tiempo. ¿Cuál es el tamaño límite de la población en términos de $N_0$ (con $N_0 \neq 0$) y las constantes de proporcionalidad de crecimiento $a$ y muerte de las bacterias $b$?

3. (10 PTS.) *Una centrífuga.* Cuando un cilindro de altura $h$ lleno con un fluido está rotando, con respecto a su eje de simetría, la presión dentro del mismo no es constante; sino dependerá de la distancia perpendicular $r$ al eje de giro. Encuentre la presión en el fluido cuando su densidad es constante, y cuando el fluido es un gas (*i.e.*, $P = \rho c_s^2$, siendo $c_s$ una constante). *Ayuda: Considere un cascarón de fluido de espesor* d$r$*, las superficies del cual son coaxiales con el recipiente rotante, y establezca la condición de equilibrio de fuerzas sobre el mismo.*

4. (10 PTS.) *Sal disolviéndose en agua.* La tasa de disolución, $dx/dt$, de sal en agua es proporcional tanto al número de gramos $x$ de sustancia sin disolver al tiempo $t$, como a la diferencia entre la concentración de saturacion $X/M$ y la actual $(x_0 - x)/M$. Aquí $X$ es el número de gramos de sal que producirán saturación y $x_0$ es el número de gramos de sal colocados en $M$ gramos de agua al tiempo $t = 0$ ¿Cuántos gramos de sal permanecerán sin disolverse a un tiempo $t$?

5. (10 PTS.) *Decaimiento radiactivo de sustancias.* Sea $A$ el número de la sustancia madre en un proceso radiactivo y $B$ el número de la sustancia "hija" al tiempo $t$, con $A(0) = A_0$ y $B(0) = 0$. Supóngase que $\alpha$ y $\beta$ son las constantes de decaimiento. Resuelva para $A(t)$ y $B(t)$ si la evolución temporal de las dos substancias satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= -\alpha\, A \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} &= +\alpha\, A - \beta\, B\ . \end{aligned}$$

6. (20 PTS.) *Oscilaciones armónicas amortiguadas.* Cuando el movimiento de un oscilador lineal es amortiguado existe, además de la fuerza restauradora normal que es $\propto -kx$, una fuerza "amortiguante" (e.g. tipo viscosidad) que es $\propto -l\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, con $l$ la constante de amortiguamiento; lo anterior se cumple para bajas velocidades del sistema. Resuelva la ecuación diferencial que describe dicho movimiento:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = 0\ ,$$

donde $b \equiv l/2m$ y $\omega^2 = k/m$. Las condiciones iniciales son: $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$. Considérense, discuta y grafique los siguientes casos:

- $|b| > |\omega|$
- $|b| = |\omega|$
- $|b| < |\omega|$

7. (15 PTS.) *Oscilaciones forzadas de un oscilador armónico.* Este tipo de situación física está representada por una ecuación del tipo escrita en el problema anterior, pero con una fuerza externa ("fuente"). Suponiendo que dicha fuerza externa es armónica, con frecuencia $\Omega$ y amplitud constante $A$, la ecuación del oscilador sería:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = A \sin \Omega t\ .$$

Este tipo de sistemas conducen al fenómeno de resonancia. Resuelva esta ecuación y encuentre la condición requerida entre la frecuencia "natural" del sistema, $\omega$, la de la fuerza aplicada $\Omega$ y el parámetro $b$, para que exista una resonancia; *i.e.*, donde la amplitud llega a su máximo. Discuta la influencia de la magnitud de $b$ en el sistema disipativo considerado.