

Las propiedades atómicas de la materia

- Hasta ahora, se ha establecido una gran parte del mecanismo requerido para el estudio de la estructura de interiores y atmósferas estelares:
el equilibrio hidrostático
el transporte de la energía y el equilibrio radiativo
la convección y la conducción
- Desde el punto de vista macroscópica, falta la generación de energía nuclear
- Lo anterior describe la materia desde el punto de vista macroscópica. Además, necesitamos unas relaciones y conocimientos que tienen que ver con las propiedades atómicas/microscópicas de la materia, como son
la ecuación de estado
la opacidad
las tasas de generación de energía
las capacidades de calor
la conductividad térmica
la nucleosíntesis (como cambia la composición química con el tiempo)
- Notar que, aunque la nucleosíntesis implica que la evolución no es estática, es un parámetro inherente en los demás procesos microscópicos.

El átomo de hidrógeno

Perspectiva

- En general, la composición del universo es
Casi 90 de cada 100 átomos son de hidrógeno.
De los diez átomos restantes, 8 o 9 son de helio.
Todos los demás elementos constituyen el último átomo o dos.
- Dada esta composición típica, el hidrógeno domina en gran parte las propiedades de la materia estelar e interestelar.
- Vemos que la Tierra y nosotros mismos tienen composiciones químicas muy anómalas comparado con el resto del universo, siendo inusualmente fuertemente influenciadas por la evolución estelar.

Los niveles energéticos del átomo de hidrógeno

- Se puede derivar las energías de los niveles del átomo de hidrógeno de manera semi-clásica con el modelo de Bohr. El primer paso es igualar la fuerza de Coulomb con la fuerza centrípeta

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{a^2}$$

donde v es la velocidad, a el radio de la órbita, e la carga del electrón/protón y m la masa reducida del sistema,

$$m = m_e \left(1 + \frac{m_e}{m_p} \right)$$

con m_e y m_p siendo las masas del electrón y protón, respectivamente.

- Luego, Bohr supuso que el momento angular era cuantizado según $mva = n\hbar$, donde \hbar es la constante de Planck dividido por 2π y n es un número entero positivo, que se conoce como el **número cuántico principal** del nivel energético.

- De esta manera, se puede obtener el radio de las órbitas electrónicas

$$a_n = \frac{n^2 \hbar^2}{me^2} = n^2 a_0, \quad n = 1, 2, \quad (1)$$

y a_0 siendo el **radio de Bohr** para el átomo de hidrógeno.

- La energía de ligadura del átomo es entonces la mitad de la energía potencial,

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_n} = -\frac{me^4}{2n^2 \hbar^2}. \quad (2)$$

- En general, los niveles energéticos en iones hidrogenicos (núcleo con un electrón) son

$$E_n = -Z^2 \frac{me^4}{2n^2 \hbar^2} = -\frac{Z^2 R}{n^2}, \quad (3)$$

donde R es el **constante de Rydberg** y Z es la carga del núcleo.

- El estado de base es el estado $n = 1$ y es el más fuertemente ligado. Para cualquier estado, E_n es la energía de ligadura del electrón al protón o núcleo. Se acerca a cero para $n \rightarrow \infty$. Energías positivas corresponden a electrones liberadas de los átomos. En este caso, cualquier energía es posible (un continuo de energías).
- Transiciones entre niveles están acompañadas por la emisión ($m > n$) o absorción ($n > m$) de un fotón de energía dada por la relación de Planck, $h\nu = |E_m - E_n|$.
- Las series de transiciones del átomo de hidrógeno con el mismo nivel inferior son conocidas como las series de Lyman ($n = 1$), Balmer ($n = 2$), Paschen ($n = 3$) y Brackett ($n = 4$), Pfund ($n = 5$). La serie de Lyman tiene sus líneas en el ultravioleta, la de Balmer en el óptico, las de Paschen, Brackett y Pfund en el infrarrojo. Los espectros ópticos de las estrellas, galaxias y nebulosas típicamente presentan las líneas de la serie de Balmer.
- Transiciones entre distintos estados ligados producen líneas de emisión o absorción con energías precisas. Por otra parte, transiciones entre estados ligados y el continuo producen fotones con una distribución de energías con energías mínimas de $E_{min,n} = |E_n|$.
- Transiciones entre estados ligados y el continuo se conocen como fotoionización o absorción ligado-libre, mientras que el proceso inverso, transiciones entre el continuo y estados ligados, se conoce como captura (radiativa) o emisión libre-ligado.
- Transiciones entre estados ligados son también posibles y se conocen como transiciones libre-libre o Bremsstrahlung si se trata de emisión o de opacidad libre-libre si se trata de absorción. La opacidad libre-libre es el componente más importante de la opacidad en regiones de las estrellas donde el hidrógeno es completamente ionizado.

La estructura energética “fina” e “hiperfina” del átomo de hidrógeno

- Los niveles definidos por las ecuaciones (2) y (3) consideran solamente la energía orbital del electrón en el campo eléctrico del protón. Sin embargo, tanto el electrón como el protón tienen un “spín”, que es un momento angular no clásico (no tiene equivalente en la mecánica clásica, sino que es un fenómeno puramente de la

mecánica cuántica). El espín del electrón interactúa con el momento angular orbital, lo cual da lugar a la estructura “fina” de los niveles energéticos. También, el espín del electrón interactúa con el espín del protón, dando lugar a la estructura “hiperfina” de los niveles energéticos.

- Para un nivel con número cuántico principal n , el momento angular puede tomar valores $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, donde el momento angular correspondiendo al estado con el número cuántico l es

$$\sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (4)$$

Históricamente, se le han asociado la nomenclatura espectroscópica siguiente con los diferentes valores de l

	S	P	D	F	G	...
l	0	1	2	3	4	...

- El espín también tiene un número cuántico asociado, s . Para el electrón o protón, $s = 1/2$. Análogamente al momento angular orbital, el momento angular asociado al estado con número cuántico de espín, s es

$$\sqrt{s(s+1)}\hbar \quad (5)$$

En el caso del electrón, el momento angular de espín es $\sqrt{3/4}\hbar$.

- Los momentos angulares orbitales y de espín se suman para dar el número cuántico de momento angular total, j , según (para el caso de un electrón)

$$j = l \pm \frac{1}{2}, \quad j \geq 0 \text{ siempre} \quad (6)$$

Entonces, tenemos para los estados de momento angular orbital anteriores las siguientes posibilidades para el número cuántico de momento angular total

	S	P	D	F	G	...
l	0	1	2	3	4	...
j	1/2	1/2, 3/2	3/2, 5/2	5/2, 7/2	7/2, 9/2	...

- La notación espectroscópica usada para denotar todo lo anterior acerca de un nivel es $n^{2s+1}l_j$.
Por lo tanto, el estado con $n = 2, j = 3/2$ y $l = 1$ se denota por $2^2P_{3/2}$, dado que necesariamente $s = 1/2$ para hidrógeno (puede tener otros valores en átomos con más electrones).
- La interacción entre los momentos angulares orbitales y de espín modifican los niveles aproximadamente según

$$\Delta E_{n,j} = \frac{\alpha^2 RZ}{n^3} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j + 1/2} \right),$$

donde

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

es la constante de “estructura fina”. Entonces, esta interacción “desdobla” todos los

niveles para $l > 0$ en dos niveles “finos”. En el caso del hidrógeno, esta estructura energética requiere una resolución alta para notarse, pero, para átomos o iones más complicados (con más electrones), se nota más fácilmente.

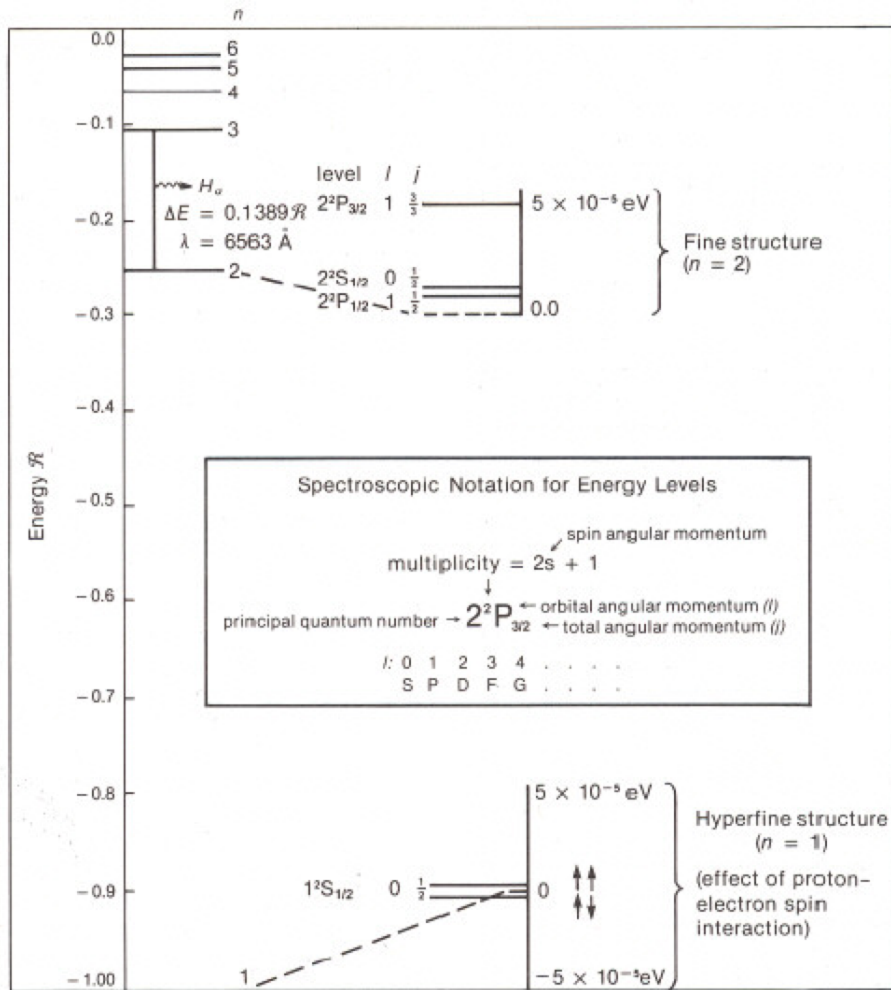


Figure 6.1. Energy levels in atomic hydrogen. The upper-right inset shows the fine structure for the $n = 2$ state. The Lamb shift between the $2^2S_{1/2}$ and $2^2P_{1/2}$ states corresponds to $\Delta E = 4.4 \times 10^{-6}$ eV. The lower inset shows the hyperfine structure of the $n = 1$ state. The energy difference between the two states is $\Delta E = 5.8 \times 10^{-6}$ eV. The photon emitted by a transition between these two states has $\nu = \Delta E/h = 1420$ MHz, corresponding to $\lambda = 21.11$ cm.

- No todas las transiciones entre niveles se dan con la misma facilidad. Por ejemplo, la transición $2^2S_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$ conserva el estado de momento angular ($l = 0$). Sin embargo, el fotón emitido lleva una unidad de momento angular. La conservación de momento angular entonces requiere que el electrón cambia su estado de spin, lo cual es un proceso poco probable. Las transiciones resultantes se llaman “prohibidas” debido a la baja probabilidad del cambio de spin del electrón y son mucho más lentas que las transiciones normales, o permitidas. Entonces, átomos que se encuentren en estados que solamente se desexcitan con transiciones prohibidas pueden permanecer en estos estados “meta-estables” mucho tiempo antes de desexcitarse espontáneamente.
- Cuando la densidad es alta, como es el caso en los interiores estelares, estos átomos tendrán muchas colisiones con otros átomos antes de desexcitarse espontáneamente.

Estas colisiones son eficaces para desexcitar estos estados meta-estables. Este proceso de desexcitar estados excitados por colisión con otros átomos o electrones se conoce como desexcitación colisional. El proceso inverso se llama excitación colisional.

- Por otra parte, estados meta-estables y transiciones prohibidas juegan un papel importante en el equilibrio térmico del medio interestelar.
- La estructura hiperfina resulta de la interacción de los espines del electrón y del protón. Esto provoca un desdoblamiento del estado de base ($1^2S_{1/2}$) en dos niveles separados por una energía $\Delta E = 5.9 \times 10^{-6}$ eV, lo cual corresponde a una longitud de onda de 21 cm. Esta transición es prohibida, porque requiere de un cambio del spín del electrón. La probabilidad es tan baja que un átomo de hidrógeno tarda del orden de 10^7 años en realizar la transición. Sin embargo, hay tanto hidrógeno en el medio interestelar que el estudio de esta radiación es uno de las herramientas más poderosas en el estudio de la estructura galáctica.

Campos magnéticos

- El movimiento orbital del electrón produce un momento magnético que puede interactuar con campos magnéticos. Esta interacción introduce aun más detalle en la estructura energética.

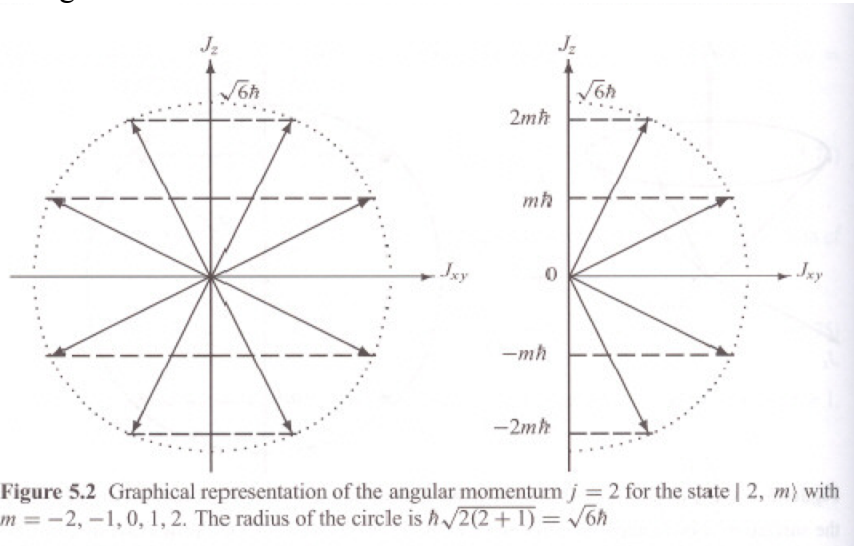
- La unidad del momento magnético del electrón es

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad (7)$$

- El componente (la proyección) del momento magnético en la dirección del campo magnético se describe con el número cuántico magnético, m . El número cuántico magnético puede tener los $2j + 1$ valores

$$m = -j, -j + 1, \dots, 0, \dots, j - 1, j \quad (8)$$

y representan las orientaciones (proyecciones) posibles del momento angular total en el campo magnético.



- La energía de interacción de un estado con número cuántico magnético m es

$$E_H = \mu_B g m H, \quad (9)$$

donde H es la fuerza del campo magnético y g es el factor Landé que mide el cociente del momento magnético del estado con respecto a su momento angular,

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}. \quad (10)$$

- Entonces, la especificación completa de un estado del átomo de hidrógeno requiere especificar los números cuánticos n , l , s y m . “El” estado descrito por el número cuántico principal es entonces una colección de estados separados por pequeñas diferencias energéticas. Como ejemplo, el estado $n = 2$ tiene los niveles siguientes

$n = 2$	$l = 1$	$j = 3/2$ $m = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$ $j = 1/2$ $m = -1/2, 1/2$
	$l = 0$	$j = 1/2$ $m = -1/2, 1/2$

- Claramente, el nivel n realmente tiene $2n^2$ subniveles. El factor $2n^2$ se conoce como es peso estadístico del nivel y se denota g_n . Esencialmente, el peso estadístico de un nivel representa el número de estados cuánticos que contiene.

Excitación térmica e ionización

- Las propiedades de la materia no solamente dependen de su composición, pero también por su grado de ionización y excitación. Estas características dependen tanto de las propiedades atómicas como de las propiedades termodinámicas (T , P , ρ).
- La ionización térmica es importante cuando kT es parecido a la energía de ligadura. Para el hidrógeno, esto sucede para temperaturas del orden de 10^5 K mientras que, para helio, sucede a temperaturas de 4×10^5 K.
- La excitación térmica requiere del orden de varios eV, lo cual implica temperaturas del orden de 10^4 K (y aprovecha la cola de la distribución de Maxwell-Boltzmann).
- A temperaturas menores, la ionización o excitación será incompleta.
- Si consideramos el nivel n de un átomo con energía E_n , habrá un número de átomos N_n en este nivel. **La ley de Boltzmann** indica que el número de átomos en este nivel es

$$N_n = A e^{-E_n/kT} g_n, \quad (11)$$

donde g_n es el peso estadístico y A es un factor de normalización. El número de átomos en todos los estados es

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} N_n = A \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-E_n/kT} \equiv AZ(T), \quad (12)$$

donde $Z(T)$ es la función de partición. Podemos eliminar el factor de normalización A para obtener

$$N_n = \frac{N}{Z(T)} g_n e^{-E_n/kT} \quad \text{y} \quad Z(T) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-E_n/kT}. \quad (13)$$

Notar que aquí E_n es positivo y se mide con respecto al estado de base, E_1 . En principio, la definición de $Z(T)$ es problemático, porque es infinito dado que hay un número infinito de niveles con cada vez más subniveles mientras que el factor exponencial es siempre finito. En la práctica, este problema no interviene, porque colisiones entre átomos provocan ionización para todos los niveles con energías

mayores a una energía E_c , donde

$$\Delta E = E_\infty - E_c = kT \quad (14)$$

con respecto a E_∞ . Entonces, es como si todos los niveles que satisfacen la ecuación (14) se fusionan al continuo y terminan la suma involucrada en $Z(T)$. En la práctica, la suma se considera solamente para un número relativamente pequeño de niveles, n . En muchos iones comunes, una vez que $n \sim 5 - 6$, E_n está dentro de varios eV de la energía de ionización para muchos iones. $kT > 2$ eV para $T \geq 25,000$ K, lo cual cubre casi todo el interior de las estrellas.

- Comparando dos niveles para un mismo átomo, el número relativo de átomos en los dos niveles es

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} e^{-(E_n - E_m)/kT} \quad (15)$$

- Podemos usar la ecuación anterior para investigar a cual temperatura la línea de $H\alpha$ será fuerte. Esta línea resulta de la transición entre $n = 3$ y $m = 2$, así que requiere una población sustancial de átomos en el nivel $m = 2$. Esto sucederá para temperaturas donde el número de átomos en el nivel 2 no es despreciable comparado al número en el estado base (nivel 1). Entonces, si igualamos el lado izquierdo de la ecuación (15) a 1.0 y recordamos que $g_n = 2n^2$, obtenemos que habrá números iguales de átomos en el estado de base y el primer nivel excitado para una temperatura de 57,000 K. En realidad, a esta temperatura, habrá ionización térmica de hidrógeno del nivel $n = 2$ (ecuación 14), así que es poco probable que $H\alpha$ será muy fuerte a esas temperaturas, porque una gran parte del hidrógeno será ionizado. Entonces, $H\alpha$ logrará su intensidad más fuerte a temperaturas más bajas. Efectivamente, observamos que las estrellas que tienen la línea de $H\alpha$ más fuerte tienen temperaturas alrededor de 10^4 K.
- Este ejemplo demuestra la competencia entre excitación e ionización. Podemos investigar esto más detalladamente aplicando la ley de Boltzmann a los electrones libres (niveles energéticos del continuo), de lo cual obtenemos

$$\frac{N_i(v)}{N_n} = \frac{g(v)}{g_n} e^{-((\chi_n + m_e v^2)/2)/kT} = \frac{g(v)}{g_n} e^{-\chi_n/kT} e^{-v^2/2m_e kT} \quad (16)$$

donde $\chi_n = E_\infty - E_n$ es la energía de ionización del átomo en el nivel n , $E_\infty + m_e v^2/2$ siendo la energía del electrón libre (con respecto al nivel de base del átomo), $N_i(v)$ es la densidad de iones cuyos electrones libres tienen velocidad v , $g(v)$ es el peso estadístico del electrón libre con velocidad v y p es el momento lineal. Para calcular $g(v)$, utilizamos el resultado de la mecánica cuántica que el número de estados cuánticos en un elemento de espacio fase es

$$\frac{dN}{h^3} \quad \text{donde} \quad dN = dx dy dz dp_x dp_y dp_z, \quad (17)$$

donde $dx dy dz$ es el elemento de volumen y $dp_x dp_y dp_z$ es el elemento de momento. Si nos acordamos que un electrón libre tiene dos estados de spín en este elemento de espacio fase, el peso estadístico es el doble del resultado anterior. Entonces, por unidad de volumen, el peso estadístico es

$$\frac{2 dp_x dp_y dp_z}{h^3} \quad (18)$$

Sin embargo, la existencia de otros electrones libres implica que cierta fracción de

este espacio fase está ocupado. Entonces, si la densidad de electrones es n_e , el espacio fase disponible es entonces n_e^{-1} , lo cual implica que el peso estadístico de electrones libres con velocidad v es

$$g(v) = 2 \frac{dp_x dp_y dp_z}{n_e h^3}. \quad (19)$$

Si ahora integramos sobre la velocidad y reconocemos que $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, obtenemos

$$\frac{n_e N_i}{N_n} = \frac{2}{h^3} \frac{e^{-\chi_n/kT}}{g_n} 4\pi \int_0^\infty p^2 e^{-p^2/2m_e kT} dp = \frac{2}{h^3} \frac{e^{-\chi_n/kT}}{g_n} (2\pi m_e kT)^{3/2}. \quad (20)$$

Si además reconocemos que el ión que queda después de liberar el electrón puede quedarse en varios estados, tenemos que multiplicar el último resultado por el peso estadístico del ión, g_i , resultando en

$$\frac{n_e N_i}{N_n} = \frac{2 g_i}{g_n} \frac{e^{-\chi_n/kT}}{h^3} (2\pi m_e kT)^{3/2}. \quad (21)$$

Este resultado se conoce como **la ley de Saha**.

- Si introducimos la presión de electrones, $P_e = n_e kT$, la ecuación (21) indica

$$\frac{N_i}{N_1} = \frac{2 g_i}{g_1} \frac{(2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3 P_e} e^{-\chi_n/kT}. \quad (22)$$

Esta forma de **la ley de Saha** nos ayuda a entender varias cosas útiles.

- Primero, para átomos o iones con energías de ionización bajas, el factor $e^{-\chi_n/kT}$ será mayor y el átomo o ión será más altamente ionizado a una temperatura dada.
 - Para apreciar este resultado relativamente obvio, consideramos los casos de sodio y hidrógeno, con energías de ionización de 5.16 eV y 13.6 eV, respectivamente. Si calculamos, para una temperatura de 6000 K, como en la atmósfera solar,

$$\frac{Na^+/Na_1}{H^+/H_1} = \frac{N(Na^+)}{N(H^+)} \approx \frac{e^{-5.16\text{eV}/kT}}{e^{-13.6\text{eV}/kT}} = 1.2 \times 10^7$$

y consideramos que $N(H) = 10^6 N(Na)$ en el Sol, vemos que el sodio contribuirá tantos electrones en la atmósfera solar como hidrógeno, a pesar de que es mucho menos abundante.

- Además, dada su alta contribución de electrones, vemos que el sodio afectará el equilibrio de ionización de hidrógeno (favorecerá menos ionización) a través del factor n_e en la ecuación (21). Lo mismo sucederá para otros elementos, como litio, calcio, aluminio y potasio, que tienen energías de ionización bajas. Entonces, aunque tienen una abundancia total mucho menor al de hidrógeno, estos elementos tienen un impacto fuerte sobre el equilibrio de ionización de elementos muchos más abundantes, pero con energías de ionización más altas, como son el hidrógeno, helio, oxígeno, carbono, nitrógeno y neón.
- Segundo, el grado de ionización depende de la presión de electrones. Si, a una temperatura dada, cambia la presión de electrones, cambiará el grado de ionización, lo cual afectará la apariencia de los espectros.
 - En estrellas enanas, la presión será mayor que en estrellas gigantes. Por lo tanto, a una temperatura dada, el grado de ionización será mayor en estrellas

gigantes que en estrellas enanas. Equivalentemente, una clase espectral dada, que se define por las fuerzas de las líneas características, sucederá a temperaturas distintas en estrellas gigantes y enanas, como indica la siguiente gráfica.

- Lo mismo sucederá al comparar estrellas (de la misma clase de luminosidad) con abundancias muy diferentes. Dada que, a la temperatura del Sol, metales, como sodio, potasio, calcio, etc., contribuyen una gran parte de los electrones, la presión de electrones bajará notablemente si la abundancia de estos elementos es mucho más baja que la abundancia solar. A baja abundancia, pero a temperatura constante, aumentará el grado de ionización de elementos con mayor energía de ionización, dando la apariencia tanto de una temperatura más alta, así como de un tipo espectral más temprano.

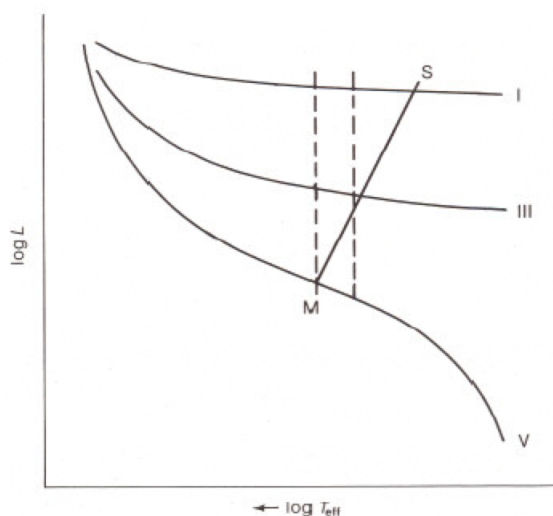


Figure 6.2. Dependence of spectral type on luminosity class for main sequence stars (V), giants (III) and supergiants (I). The line MS is line of constant spectral type.

- Un resultado interesante de la ecuación de Saha es la variación del grado de ionización con la temperatura. Notamos que el grado de ionización, x , es el cociente de la densidad de iones con respecto a la densidad total del elemento en todos los estados de ionización, o sea

$$x = \frac{N_i}{N_0 + N_i}, \quad (23)$$

lo que permite escribir la ecuación (21) como

$$\frac{x}{1-x} = \frac{2g_i}{n_e g_n} \frac{e^{-\chi_n/kT}}{h^3} (2\pi m_e kT)^{3/2}. \quad (24)$$

La siguiente gráfica demuestra la variación de los grados de ionización de hidrógeno y helio en función de la temperatura para dos presiones de electrones fijas. Obviamente, el grado de ionización es aproximadamente constante, salvo en pequeños rangos de temperatura, que corresponden a las **zonas de ionización**. Esta gráfica también hace patente el desplazamiento de las zonas de ionización en función de la temperatura.

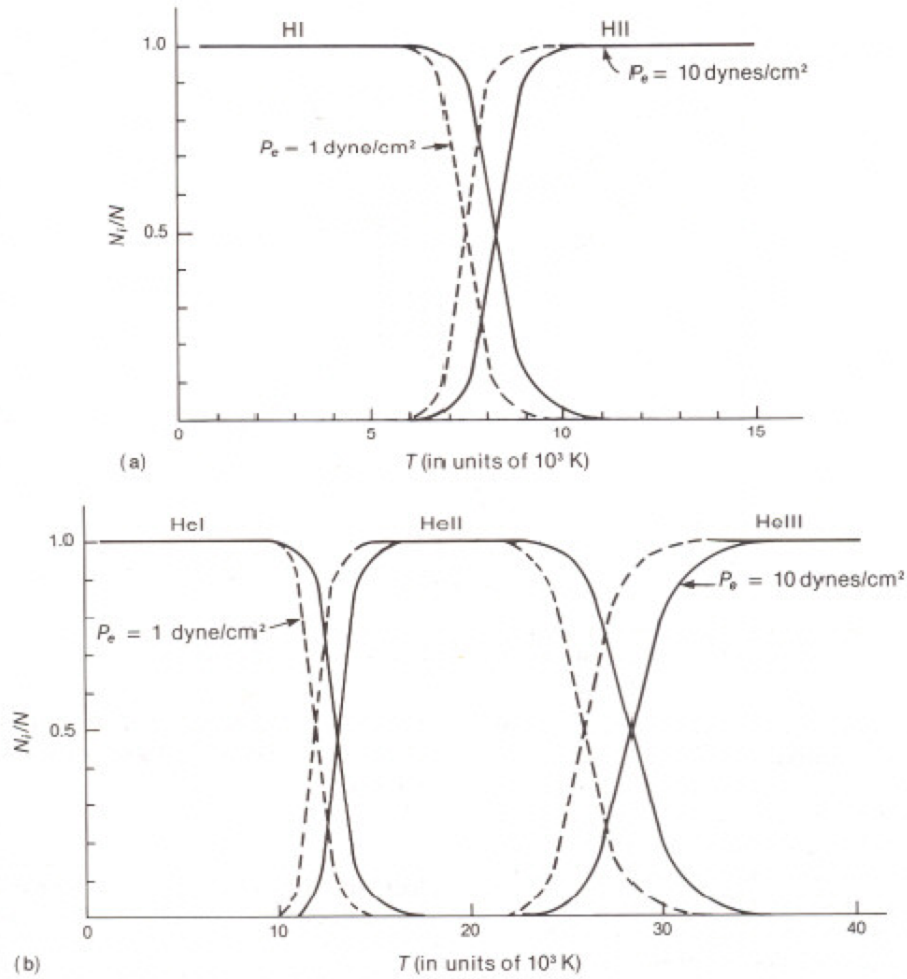


Figure 6.3. (a) Fractional ionization of hydrogen versus temperature (solid curve is electron pressure $P_e = 10$ dynes/cm²; dashed curve is $P_e = 1$ dyne/cm²). (b) Fractional ionization of He (for $P_e = 1$ and $P_e = 10$ dynes/cm²).

- Podemos combinar las ecuaciones de Saha y Boltzmann para obtener una ecuación que da el número de átomos en un estado de ionización y un estado energético dado. Insertamos la ecuación (24) en la ecuación de Boltzmann (13)

$$\begin{aligned}
 N_n &= \frac{N_0}{Z(T)} e^{-E_n/kT} g_n = \frac{g_n}{Z(T)} e^{-E_n/kT} (1 - x(n_e, T)) N_T \\
 &= \frac{g_n}{Z(T)} e^{-E_n/kT} \left(1 + \frac{2g_i}{n_e g_n} \frac{e^{-\chi_n/kT}}{\hbar^3} (2\pi m_e kT)^{3/2} \right)^{-1} N_T \quad (25)
 \end{aligned}$$

donde $N_T = N_i + N_0$ es la suma de los iones y átomos neutros de un elemento. Con el resultado anterior, podemos determinar la temperatura a la cual se maximiza la población de átomos o iones en un estado dado para predecir cuando se maximizará la fuerza de líneas de absorción particulares. Como ejemplo, la fuerza de la línea de $H\alpha$ será máximo donde

$$\frac{dN_2}{dT} \text{ es máximo, o a la temperatura donde } \frac{d^2 N_2}{dT^2} = 0.$$

Equilibrio detallado, probabilidades de transición y opacidades de línea

Equilibrio detallado

- La discusión de las ecuaciones de Boltzmann y Saha dependen de consideraciones termodinámicas. Sin embargo, a nivel atómico, dependen de procesos cuánticos, los cuales, en equilibrio, deben reproducir los resultados termodinámicos.
- Procesos cuánticos son básicamente procesos estadísticos. Se caracterizan por una probabilidad por unidad de tiempo que suceda algún proceso.
- Consideramos la situación descrita por la siguiente figura, de un átomo en un estado superior n que decae espontáneamente a un estado m emitiendo un fotón con frecuencia $\nu = (E_n - E_m)/h$. Este proceso depende únicamente de la estructura del átomo y la probabilidad de estas transiciones será un constante, que tradicionalmente llamamos la constante A_{nm} de Einstein. Si a un tiempo $t = 0$ tenemos $N_n(t = 0)$ átomos en el estado n , en un tiempo ulterior, tendremos

$$N_n(t) = N_n(t = 0)e^{-A_{nm}t} \quad (26)$$

átomos en el mismo estado. Por lo tanto, A_{nm} representa el tiempo promedio que pasan átomos en el estado n antes de decaer al estado m .

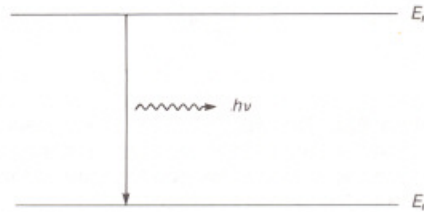


Figure 6.4. Atomic transition from excited state n to state m (radiative decay).

- Lo anterior considera solamente transiciones a un estado inferior particular m . La probabilidad total para transiciones a todos los estados de menor energía ($m < n$) es

$$A_n = \sum_{m < n} A_{nm} \quad (27)$$

- El proceso inverso, la absorción de un fotón por un átomo en el estado m para excitarse al estado n también sucede, igualmente con una probabilidad que dependerá solamente de la estructura del átomo y de la densidad de fotones adecuados. El coeficiente B_{mn} de Einstein describe este proceso

$$u_\nu B_{mn} = B_{mn} \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (28)$$

donde u_ν es la densidad energético del campo radiativo (de cuerpo negro: implicado por la condición de equilibrio termodinámico) y representa la probabilidad para excitación del nivel m al nivel n por la absorción de un fotón con frecuencia $\nu = (E_n - E_m)/h$.

- Si N_n y N_m son el número de átomos en los estados n y m , respectivamente, y si A_{nm} y B_{mn} son constantes, en equilibrio tendríamos

$$N_n A_{nm} = N_m u_\nu B_{mn},$$

lo cual **no** permite derivar una expresión del estilo

$$\frac{N_n}{N_m} = e^{-h\nu/kT},$$

parecida a la ecuación de Boltzmann (el resultado de la termodinámica), así que otro proceso debe intervenir. Este proceso es la emisión estimulada, donde un fotón con frecuencia $\nu = (E_n - E_m)/h$ estimula una transición del nivel n al nivel m antes de que esta transición pueda suceder de manera espontánea. La emisión estimulada se define a través otro constante atómico, B_{nm} , que da la tasa de transiciones inducidas entre los niveles n y m ,

$$u_\nu B_{nm}.$$

Por lo tanto, el número de transiciones es

$$N_n u_\nu B_{nm}. \quad (29)$$

- Ahora, el equilibrio estadístico demanda

$$N_n A_{nm} + N_n u_\nu B_{nm} = N_m u_\nu B_{mn}, \quad (30)$$

lo cual podemos reacomodar para obtener

$$u_\nu = \frac{N_n A_{nm}}{N_m B_{mn} - N_n B_{nm}} = \frac{A_{nm}/B_{nm}}{\frac{N_m B_{mn}}{N_n B_{nm}} - 1}. \quad (31)$$

Si comparamos lo anterior con (la ecuación del cuerpo negro)

$$u_\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

deducimos que

$$B_{nm} = B_{mn}, \quad \frac{N_n}{N_m} = e^{-h\nu/kT} \quad \text{y} \quad A_{nm} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{mn}. \quad (32)$$

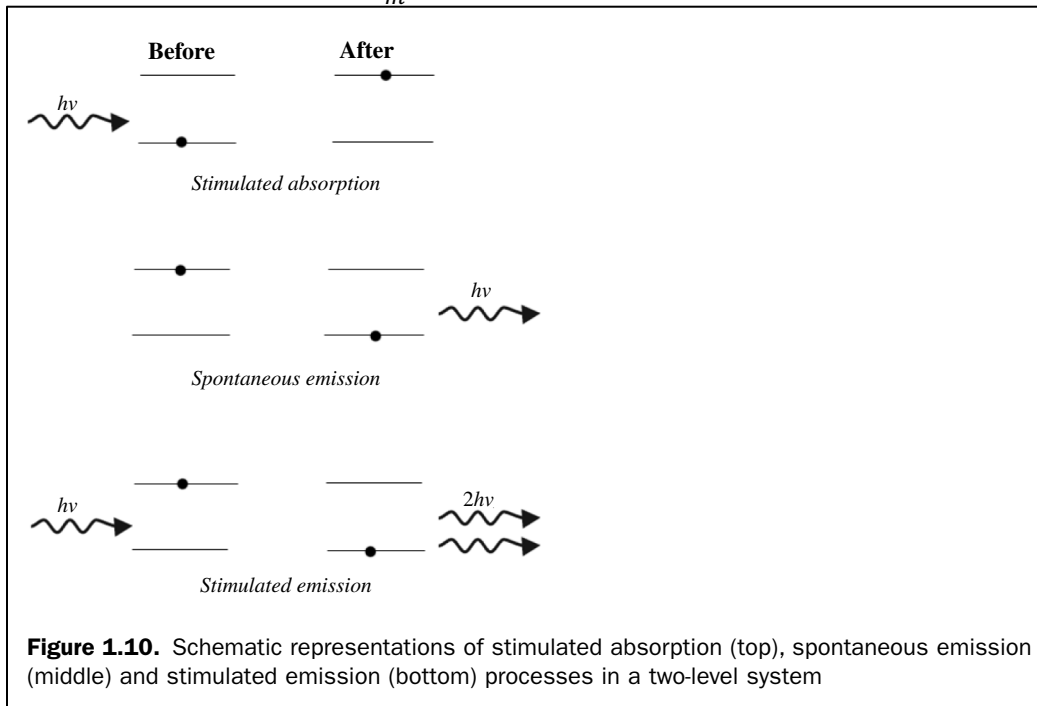


Figure 1: Este dibujo ilustra los procesos de absorción (arriba), emisión espontánea (intermedio) y emisión estimulada (abajo) del libro de Kakkar.

- Lo anterior supone que los niveles n y m son niveles sencillos, es decir que no están compuestos de subniveles. En principio, es fácil generalizar lo anterior para incluir subniveles, pero, en la práctica, la posibilidad de transiciones prohibidas entre los subniveles complica el asunto considerablemente. Suponemos i componentes del nivel n y j componentes del nivel m , como se ven en la gráfica que sigue (estos niveles son sencillos, es decir que todos tienen peso estadístico de 1.0; $g_{ni} = 1.0$). Entonces, la transición de (n,i) a (m,j) tiene probabilidad $A(n, i; m, j)$. Suponemos que la población en el nivel (n, i) es N_{ni} . En este caso, el número de transiciones espontáneas es

$$\sum_{i,j} N_{ni} A(n, i; m, j) = \frac{N_n}{g_n} \sum_{i,j} A(n, i; m, j) = N_n A_{nm} \quad (33)$$

lo cual implica

$$A_{nm} = \frac{1}{g_n} \sum_{i,j} A(n, i; m, j) \quad \text{si} \quad N_{ni} = \frac{N_n}{g_n}. \quad (34)$$

El último paso implica que todos los subniveles tendrían poblaciones iguales o, equivalentemente, que la separación entre los niveles n y m es mucho mayor a la separación de los subniveles.

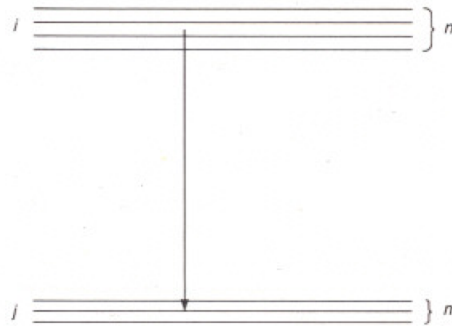


Figure 6.5. Degenerate atomic levels. The difference in energy between levels of fixed n or m is small compared to $E_{ni} - E_{mj}$.

- Ahora, consideramos las transiciones del nivel m al nivel n , la excitación por absorción de fotones. La expresión análoga a la (33) es

$$u_\nu \sum_{ij} N_{mj} B(m, j; n, i) = u_\nu \frac{N_m}{g_m} \sum_{ij} B(m, j; n, i) = u_\nu N_m B_{mn} \quad (35)$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \frac{1}{g_n} \sum_{ij} B(m, j; n, i) = \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} \frac{1}{g_m} \sum_{ij} A(n, i; m, j) \\ &= \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} \frac{g_n}{g_m} A_{nm} = \frac{g_n}{g_m} B_{nm}. \end{aligned} \quad (36)$$

- Ahora, ¿cuáles son los valores de estas probabilidades de transición? En principio, debemos partir de cálculos de la mecánica cuántica, pero ya tenemos las herramientas para deducir ciertos resultados. Generalmente, la probabilidad de un proceso depende del número de maneras que se puede dar. Si fotones en el rango $(\nu, \nu + d\nu)$ están involucrados en el proceso, ¿de cuántas maneras pueden fotones tener estas

frecuencias? Equivalentemente, ¿cuál es el peso estadístico del rango de frecuencias $(\nu, \nu + d\nu)$? Ya vimos el problema análogo de una partícula libre con velocidad v . El peso estadístico por unidad de volumen y ángulo sólido es

$$\frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3} d\Omega = \frac{p^2 dp d\Omega}{h^3}.$$

Dado que el momento de un fotón es $p = h\nu/c$, el peso estadístico por unidad de volumen y ángulo sólido es

$$\frac{\nu^2 d\nu d\Omega}{hc^2}. \quad (37)$$

Entonces, transiciones de frecuencia alta tienen mayor probabilidad que sus contrapartes de frecuencia baja.

- Como ya vimos (ecuación 26), A_{nm} representa la vida promedio de un átomo en el estado n antes de decaer espontáneamente al estado m . Por lo tanto, el principio de incertidumbre implica que la energía no es precisamente definida, sino que tendrá una incertidumbre, ΔE , dado por

$$\Delta E \Delta t \approx h, \quad (38)$$

donde $\Delta t = A_{mn}^{-1}$. Dado que $\Delta E = h\Delta\nu$, la ecuación (38) implica que la energía de la transición será distribuida sobre un intervalo de frecuencia de

$$\Delta\nu \approx A_{mn}. \quad (39)$$

que es **la anchura natural de la línea**. Como veremos, normalmente, otros procesos dominan en establecer la anchura observada de una línea.

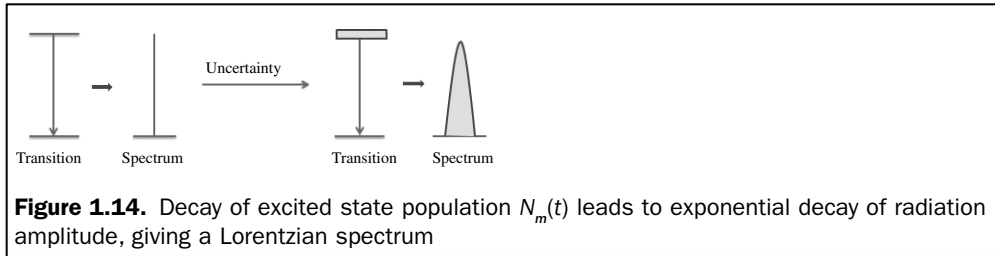


Figure 2: Este dibujo explica la anchura natural de una línea espectral como consecuencia de las relaciones de incertidumbre de la mecánica cuántica (del texto de Kakkar).

- Clásicamente, la distribución de energía de la línea, en función de la frecuencia, es el perfil de Lorentz

$$I(\nu) = I_0 \frac{\gamma/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2}, \quad (40)$$

donde ν_0 es la frecuencia en el centro de la línea y

$$\gamma = \nu_0^2 \frac{8\pi^2 e^2}{3m_e c^3}. \quad (41)$$

Los coeficientes de Einstein, A_{nm} y B_{nm} , están relacionados a γ por

$$A_{nm} = 3 \frac{g_m}{g_n} f_{nm} \gamma \quad \text{y} \quad B_{mn} = \frac{\pi e^2}{m_e h \nu} f_{nm}, \quad (42)$$

f_{nm} siendo la fuerza de oscilador de la transición, dado por la formula de Kramer,

$$f_{nm} = \frac{2^6}{3\sqrt{3}} \frac{1}{g_m} \frac{1}{\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)^3} \frac{g_l}{n^3 m^3}, \quad (43)$$

con g_l siendo el factor de Gaunt, que es un factor numérico del orden de la unidad.

- Se puede usar lo anterior para determinar el coeficiente de absorción por átomo en la línea, a_ν . La probabilidad de absorción por unidad de trayectoria es definida como Na_ν , donde N es la densidad de átomos (por número). Entonces, la energía absorbida de un rayo con una unidad de área, I_ν , en el intervalo de frecuencia ν a $\nu + d\nu$ será $I_\nu Na_\nu c dt$, donde el factor $c dt$ representa el espacio que viajará el rayo en una unidad de tiempo. Este factor también representa el volumen ocupada por el rayo en una unidad de tiempo (tiene una unidad de área). Entonces, el número de transiciones por unidad de volumen, unidad de tiempo, unidad de frecuencia y por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{I_\nu Na_\nu}{h\nu}.$$

Si integramos sobre el ángulo sólido y suponemos que la radiación está en equilibrio termodinámico ($4\pi I_\nu = cu_\nu$), el número de transiciones es

$$\frac{cu_\nu Na_\nu}{h\nu}. \quad (44)$$

Si integramos sobre la frecuencia y notamos que el número de transiciones tiene que ser $u_{\nu_0} B_{nm} N$, obtenemos

$$u_{\nu_0} B_{nm} N = cN \int_0^\infty \frac{u_\nu}{h\nu} a_\nu d\nu \approx \frac{cN u_{\nu_0}}{h\nu_0} \int_0^\infty a_\nu d\nu$$

o (utilizando la ec. 42)

$$\int_0^\infty a_\nu d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{nm} = 2.65 \times 10^{-2} f_{nm} \text{ cm}^2 \text{ Hz}, \quad (45)$$

porque la integral de a_ν sobre frecuencia es la absorción total en la línea. La ecuación (45) se conoce como la relación de Ladenburg.

- En lo anterior, no consideramos la emisión estimulada. Podemos incluir este efecto considerando que la emisión estimulada es una especie de emisión negativa, así que reducirá el coeficiente de absorción. El número neto de absorciones será entonces

$$\begin{aligned} N_m u_\nu B_{mn} - N_n u_\nu B_{nm} &= N_m u_\nu B_{mn} \left(1 - \frac{N_n B_{nm}}{N_m B_{mn}}\right) \\ &= N_m u_\nu B_{mn} (1 - e^{-h\nu/kT}) \end{aligned} \quad (46)$$

así que el efecto de la emisión estimulada es de reducir la absorción por el factor exponencial $e^{-h\nu/kT}$, lo cual implica que la ecuación (45) es

$$(1 - e^{-h\nu/kT}) \int_0^\infty a_\nu d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{nm} (1 - e^{-h\nu/kT}). \quad (47)$$

- Finalmente, notamos que el coeficiente de absorción utilizado en la ecuación de la transferencia de la radiación es

$$k_l(\nu) = n a_{nm}(\nu) \quad (48)$$

donde n es la densidad de átomos (por número).

La opacidad continua en las estrellas

- La opacidad controla que tan fácilmente fotones escapan del interior de las estrellas. Además de regular la transferencia de la energía, la opacidad degrada los fotones, desde las energías de rayos gama hasta fotones ópticos.
- Los procesos principales que intervienen en la opacidad son
 1. transiciones ligado-ligado
 2. transiciones ligado-libre (fotoionización y recombinación)
 3. transiciones libre-libre
 4. dispersión por electrones (dispersión Thomson y Compton)
 5. transiciones moleculares

La gráfica que sigue describe esquemáticamente los procesos 1-3 y 5.

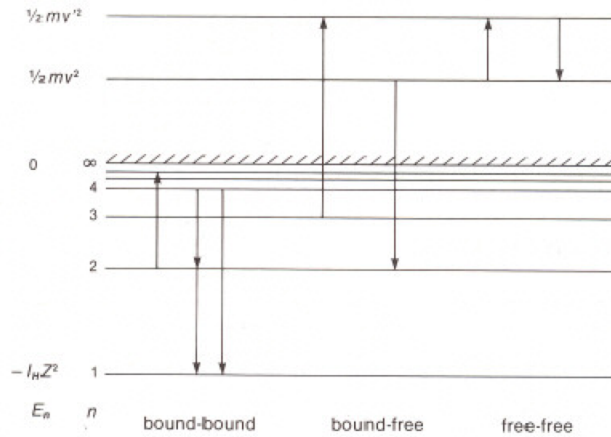


Figure 6.7. Primary atomic transitions contributing to stellar opacity. The leftmost column gives the electron's energy E_n ; the next contains the principle quantum number n of the bound state. The ionization limit is shown cross-hatched.

- Los procesos anteriores dominan en ciertas condiciones. En las atmósferas de las estrellas más frías, las transiciones moleculares así como las transiciones libre-ligado y libre-libre del ión H^- son las más importantes. A mayores temperaturas, dominan las transiciones ligado-ligado, libre-ligado y libre-libre del hidrógeno. La ecuación (47) demuestra que, conforme aumenta la temperatura, las transiciones ligado-ligado son cada vez menos efectivas como fuente de opacidad, porque el factor $e^{-h\nu/kT}$ eventualmente apaga el proceso. A estas temperaturas, la materia es completamente ionizada y la dispersión por electrones domina.

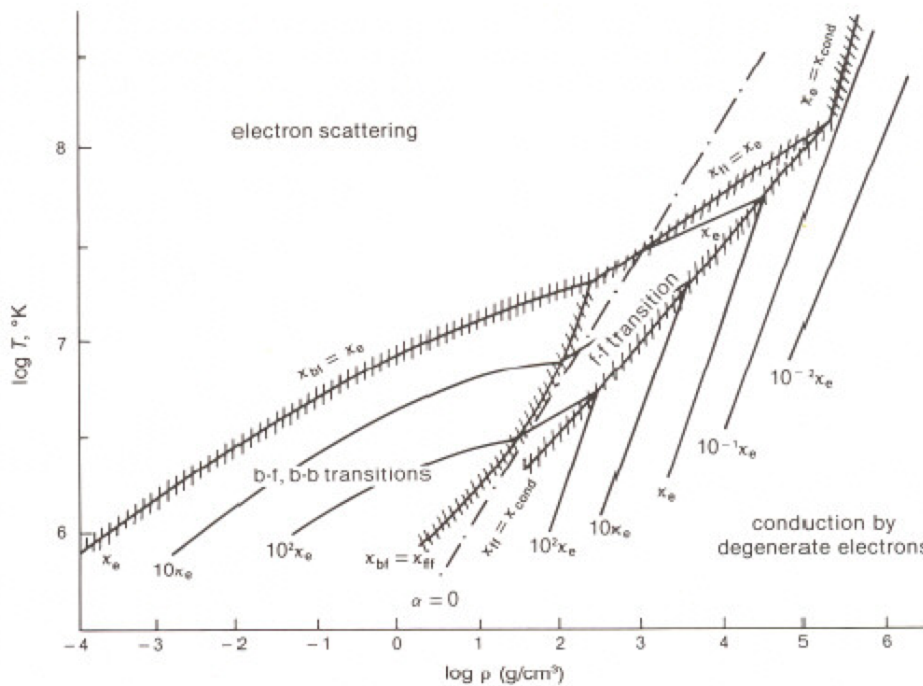


Figure 6.13. Stellar opacity in the ρ, T -plane for Population I stars. Cross-hatched lines denote boundaries at which the contributions from the two atomic process shown are equal.

- En principio, el cálculo de la opacidad procede como sigue.
 - De la mecánica cuántica, se obtiene la sección recta para los procesos involucrados, $a_i(\nu)$, donde el índice i se refiere a los procesos 1-5 en la lista anterior.

- La opacidad específica (en cm^2/g) es entonces

$$\kappa_i(\nu) = \frac{n_i a_i(\nu)}{\rho} \text{ cm}^2/\text{g} . \quad (49)$$

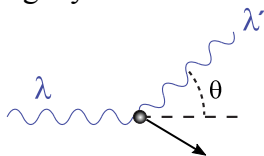
- La opacidad específica total resulta

$$\kappa_{tot}(\nu) = \sum_i \kappa_i(\nu) \text{ cm}^2/\text{g} . \quad (50)$$

- Recordamos que la opacidad y la opacidad específica están relacionadas por $k_i(\nu) = \kappa_i(\nu)\rho \text{ cm}^{-1}$.
- Frecuentemente, una sola fuente de opacidad domina.

Dispersión por electrones

- Cuando un fotón y un electrón libre interactúan, el proceso tiene que conservar la energía y momento del sistema completo (fotón y electrón).



fuelle:

https://en.wikipedia.org/wiki/Compton_scattering

- Estas restricciones implican el proceso de dispersión Compton, donde la longitud de onda del fotón aumenta por

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2(\theta/2) \quad (51)$$

donde λ y λ' son las longitudes de onda inicial y dispersados, $\lambda_c = h/m_e c$ es la longitud de onda de Compton del electrón y θ es el ángulo de dispersión del fotón. Dado que λ_c es pequeña, el cambio de energía en dispersión Compton es despreciable, salvo para fotones de alta energía (rayos X y gama).

- Si se consideran solamente electrones de baja energía ($v \ll c$), se puede derivar la sección recta para este proceso con argumentos semiclásicos. En este caso, nos interesa la sección recta para que un electrón absorbe energía del campo electromagnético. La energía absorbida por el electrón por segundo es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} a^2, \quad (52)$$

donde $a = e\mathcal{E}/m_e$ es la aceleración del electrón y \mathcal{E} es la magnitud del campo eléctrico. Dado que el promedio temporal de la densidad energética del campo eléctrico es $\langle \mathcal{E}^2/4\pi \rangle$, el flujo absorbido por electrón será $c\langle \mathcal{E}^2/4\pi \rangle$. Si se considera el promedio temporal de la ecuación (52), obtenemos

$$\frac{dE}{dt} = \sigma_T c \frac{\langle \mathcal{E}^2 \rangle}{4\pi} = \frac{2e^4 \langle \mathcal{E}^2 \rangle}{3c^3 m_e}, \quad (53)$$

lo cual define la sección recta de Thomson, σ_T ,

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2. \quad (54)$$

- Para temperaturas excediendo 10^9 K, los efectos relativistas son apreciables, los cuales reducen la sección recta anterior, eventualmente reduciéndolo a cero.
- Cuando la ecuación (54) es válida, la opacidad debido a dispersión por electrones es

$$\kappa_e = \frac{\sigma_T n_e}{\rho} = 0.2(1 + X) \quad (55)$$

donde X es la fracción de hidrógeno por masa.

- Una característica de la dispersión por electrones es que es isotrópica y no depende de la frecuencia.
- Los fotones pueden ser dispersados por protones y otros núcleos atómicos. Sin embargo, la sección recta depende de la aceleración cuadrada, implicando un factor adicional de $(Am_H)^{-2}$ a la ecuación (53) debido a la masa del núcleo, A siendo la masa atómica. Este factor disminuye la sección recta por un factor de al menos 10^{-6} y el proceso resulta despreciable en comparación a la dispersión por electrones.

Absorción libre-libre (bremsstrahlung)

- Como la dispersión por electrones, la absorción libre-libre también es una interacción entre fotones y electrones libres. El diagrama que sigue presenta la geometría de la interacción.
- Tanto para emisión de energía como para absorción, tenemos

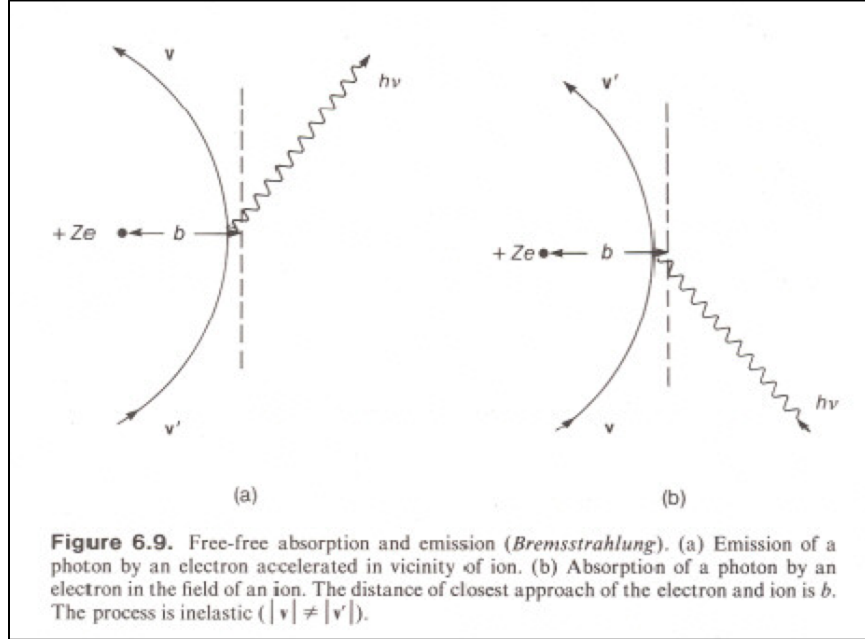
$$\frac{1}{2} m_e v^2 + h\nu = \frac{1}{2} m_e v'^2$$

donde m_e es la masa del electrón, v y v' su velocidad inicial y final (en el caso de emisión; el revés en caso de absorción) y ν la frecuencia del fotón emitido o absorbido. Necesariamente, $v' > v$.

- Si consideramos el caso de emisión, la energía total emitida por electrón, por ión y por unidad de frecuencia dependerá de las densidades de electrones e iones, n_e y n_i , respectivamente, de la probabilidad de tener electrones con la velocidad v' ,

$$f(v')dv' = 4\pi \left(\frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-(m_e v'^2/2kT)} v'^2 dv',$$

que es la distribución de Maxwell, y la energía emitida por interacción, dq_ν o sea

$$dE(\nu) = n_i n_e f(v') dv' dq_\nu \quad (56)$$


- En el caso de absorción, la energía total absorbida por electrón, por ión, por unidad de frecuencia dependerá de las densidades de electrones e iones, n_e y n_i , respectivamente, de la probabilidad de tener electrones con la velocidad v , $f(v)dv$, de la densidad de fotones con energía $h\nu$, $cu_\nu dv$, del coeficiente de absorción libre-libre, a_ν , y del factor de atenuación debido a emisión estimulada, $(1 - e^{-h\nu/kT})$

$$dE(\nu) = n_i n_e f(v) dv a_\nu c u_\nu dv (1 - e^{-h\nu/kT}) \quad (57)$$

- Aunque la derivación es complicada, encontramos que

$$a_\nu = \frac{\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{h c m_e \nu v^3} \text{ cm}^2 \text{ por electrón y por ión} \quad (58)$$

donde h es el constante de Planck, c la velocidad de la luz, m_e la masa del electrón, Z y e las cargas del ión y electrón, respectivamente, v la velocidad inicial del electrón (recordamos que se trata de absorción) y ν la frecuencia del fotón absorbida. Ciertos aspectos de esta ecuación no son tan sorprendentes. Las dependencias inversas de a_ν con la velocidad del electrón y la frecuencia del fotón se debe a la dificultad de acoplar el campo eléctrico del ión a energías altas del electrón o fotón. Básicamente, a altas energías, ni el electrón ni el fotón perciben fácilmente el campo eléctrico del ión. En otras palabras, la absorción libre-libre no es tan eficiente a temperaturas altas, profundo en las interiores estelares, donde los electrones y fotones son muy energéticas.

- La opacidad Bremsstrahlung es dada por

$$\kappa_{ff} = \int_0^{\infty} n_i n_e f(v) dv a_v g_{ff}(v, v) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3m_e kT}} \frac{Z^2 e^6}{h c m_e v^3} n_i n_e g_{ff}(v) \quad (59)$$

donde $g_{ff}(v, v)$ es el factor de Gaunt en función de la frecuencia del fotón y la velocidad del electrón mientras $g_{ff}(v)$ es el factor de Gaunt promediado sobre la velocidad de los electrones. El factor de Gaunt es una corrección del orden de la unidad que ajusta el cálculo clásico a los resultados cuánticos. Notar que la opacidad de Bremsstrahlung cae muy rápidamente con la frecuencia.

- Finalmente, la opacidad promedio de Rosseland (usado en los cálculos de la estructura estelar) debido a la absorción libre-libre es

$$\bar{\kappa}_{ff}(v) = \kappa_0(v) \rho T^{-7/2} \quad (60)$$

donde ρ y T son la densidad y temperatura, respectivamente mientras que $\kappa_0(v)$ es un constante que depende de la composición química, dado por

$$\kappa_0(v) = 3.68 \times 10^{22} (1 + X)(1 - Z) \bar{g}_{ff}(v) \quad (61)$$

X y Z siendo las fracciones por masa de hidrógeno y metales, respectivamente. La dependencia de $\rho T^{-3.5}$ fue obtenido originalmente por Kramers y frecuentemente se conoce como la opacidad de Kramers.

Absorción libre-ligado

- La diferencia fundamental entre absorción libre-libre y absorción libre-ligado es la naturaleza discreta del estado final, como demuestra el diagrama siguiente.
- En este caso, la energía de los fotones emitidos en el proceso de captura del electrón (o en el proceso inverso de fotoionización) satisface

$$\frac{1}{2} m_e v^2 - E_n = h\nu \quad (62)$$

donde m_e y v son la masa y velocidad del electrón y E_n la energía en el nivel n de ligadura del electrón en el estado ligado. En el caso de iones hidrogenicas,

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar n^2} = -\frac{RZ^2}{n^2} \quad (63)$$

- Para el proceso de captura de electrones del continuo al nivel n la sección recta es

$$\sigma_{cn} = \frac{32}{3} \pi^4 \frac{Z^4 e^{10}}{m_e v^2 c^3 h^4 v n^3} \text{ cm}^2, \quad (64)$$

donde los símbolos tienen sus significados usuales.

- Si comparamos la sección recta para la captura de electrones con el coeficiente de absorción libre-libre (ecuaciones 64 y 58, respectivamente), notamos unas dependencias distintas debido a que la captura de electrones libres necesariamente involucra a electrones menos energéticas. La sección recta para la captura de electrones es más sensible a la energía del electrón libre (v) y la fuerza del campo eléctrico del ión ($Z^4 e^{10}$). Igualmente, vemos que la sección recta es mayor para niveles energéticos inferiores del ión, lo cual también favorece interacciones con electrones de baja energía.
- En equilibrio, la tasa de captura de electrones libres es igual a su proceso inverso, que es la fotoionización. La tasa de captura dependerá de las densidades de iones y electrones, N_i y n_e , respectivamente, la energía cinética de los electrones con

velocidad v , la sección recta para el proceso y de la distribución de velocidades de los electrones, $f(v)dv$,

$$\text{tasa de captura} = N_i n_e \sigma_{cn} v f(v) dv \quad (65)$$

Por su parte, el proceso de fotoionización dependerá de la densidad de fotones con frecuencias ν capaz de ionizar iones o átomos en el nivel n , la sección recta para la fotoionización, σ_{vn} , y la densidad de iones o átomos en el nivel n , N_n ,

$$\text{tasa de fotoionización} = \frac{c u_\nu}{h\nu} d\nu \sigma_{vn} N_n (1 - e^{-h\nu/kT}), \quad (66)$$

donde el último factor corrige por emisión estimulada.

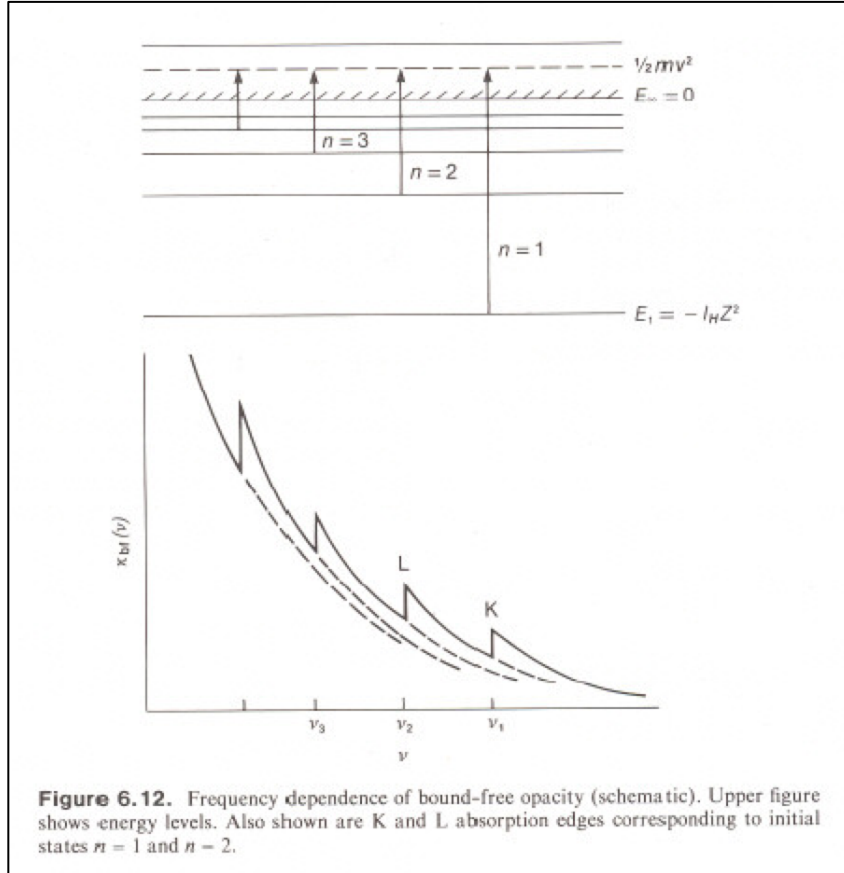


Figure 6.12. Frequency dependence of bound-free opacity (schematic). Upper figure shows energy levels. Also shown are K and L absorption edges corresponding to initial states $n = 1$ and $n = 2$.

- La ecuación de Boltzmann permite relacionar el número de átomos en los niveles de base y n , N_n y N_1 , respectivamente

$$\frac{N_n}{N_1} = \frac{g_n}{g_1} \exp\left(\frac{-RZ^2(1 - 1/n^2)}{kT}\right)$$

mientras que la ecuación de Saha permite determinar la relación entre las poblaciones de iones y átomos, N_i y N , respectivamente

$$\frac{N_i n_e}{N_n} = 2 \frac{g_i}{g_n} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-RZ^2/kT}.$$

Usando estas ecuaciones, podemos relacionar las secciones rectas de captura de electrones y fotoionización igualando las ecuaciones (65) y (66) para obtener

$$\sigma_{vn} = \frac{g_i}{g_n} \left(\frac{m_e v c}{h\nu}\right)^2 \sigma_{cn}. \quad (67)$$

Dado que se supone que los $(Z - 1)$ electrones interiores del ión no participan en el

proceso, se puede suponer que el ión tiene solamente una configuración posible, o sea que $g_i = 1$. Si combinamos lo anterior, obtenemos

$$\sigma_{vn} = \frac{64\pi^4 m_e Z^4 e^{10}}{3\sqrt{3} h^6 c v^3 n^5} g_{bf}(v, n), \quad (68)$$

donde la dependencia sobre el estado del ión, n , y la energía del fotón, $h\nu$ son evidentemente primordiales. El factor $g_{bf}(v, n)$ es el factor de gaunt para emisión libre-ligado que tiene un valor del orden de la unidad y ajusta los cálculos clásicos a los resultados cuánticos.

- Obviamente, la sección recta para fotoionización es nula si

$$h\nu < \frac{RZ^2}{n^2} \quad (69)$$

porque los fotones que no satisfacen esta condición no tienen la energía para fotoionizar átomos en el nivel n . Con este resultado, vemos que σ_{cn} y σ_{vn} son proporcionales a n (ecuaciones 64 y 67 o 68), lo cual implica una estructura de escalera en la variación de estas secciones rectas (ver la figura anterior). El crecimiento de estas secciones rectas con n tiene sentido dado que cuanto más grande es n , más cercanos energéticamente son los estados inicial y final del electrón y más fácilmente se acoplan.

- Entre las discontinuidades en σ_{cn} y σ_{vn} , estas secciones rectas varían como $(h\nu)^{-1/2}$ debido a la condición (69). Esta variación también se nota en la figura anterior. Los dos efectos se combinan para producir el perfil “triangular” de las secciones rectas σ_{cn} y σ_{vn} . (La gráfica anterior demuestra la variación de la opacidad libre-ligado como función de la frecuencia. Cualitativamente, la variación de σ_{cn} y σ_{vn} es parecida, pero menos pronunciado, como veremos).
- Finalmente, la opacidad libre-ligado es dada por

$$\kappa_{bf}(v) = \sum_n \frac{N_n}{\rho} \sigma_{vn}. \quad (70)$$

Cuando la opacidad libre-ligado es importante, la mayoría de los átomos se encuentran en su estado de base. En este caso, la ecuación de Boltzmann indica que $N_n \propto n^2$. Combinando este resultado con $\sigma_{vn} \propto n$ (ecuación 69), vemos que los términos de la suma (ecuación 70) son proporcionales a n^3 , así que las contribuciones importantes se deben principalmente a estados altamente excitados (n grande).

- Si calculamos una opacidad promedia de Rosseland basado en κ_{bf} , obtenemos

$$\kappa_{bf} = \kappa_0 \rho T \quad \text{donde} \quad \kappa_0 = 4.34 \times 10^{25} Z(1+X) \frac{\overline{g_{bf}}}{t}, \quad (71)$$

$\overline{g_{bf}}$ siendo el factor de gaunt promediado sobre la frecuencia, X y Z las fracciones por masa de hidrógeno y metales, respectivamente, y t un factor que corrige por la sobre población de electrones ligados resultantes de las aproximaciones utilizadas en obtener los resultados anteriores. Si comparamos las ecuaciones (61) y (71), vemos que la opacidad ligado-libre domina sobre la opacidad libre-libre cuando las condiciones físicas (temperaturas bajas) permitan que la opacidad libre-ligado sea importante.

La opacidad por conducción electrónica

- Anteriormente (capítulo 5), definimos una conductividad térmica, λ_c , para la transferencia de energía por la conducción de electrones y el flujo de energía transportado por este medio, F_{cond}

$$F_{cond} = -\lambda_c \nabla T \quad (72)$$

donde ∇T es el gradiente de la temperatura. Se puede relacionar la conductividad térmica a una opacidad, κ_c .

- Consideramos un plasma no degenerado de electrones no relativistas. No tenemos que preocuparnos de la transferencia de energía debido a iones, porque, a una temperatura dada, los electrones tendrán velocidades mucho más altas, así que dominarán la transferencia de energía por conducción. Sin embargo, son los campos eléctricos de iones los responsables por la dispersión que sufren los electrones y de ahí viene la opacidad involucrado en el proceso.
- El flujo de energía transportado por electrones será el producto del flujo de electrones, $n_e \bar{v}$, con velocidad promedio \bar{v} y la diferencia en la energía de los electrones separados por un trayecto medio libre, l_e

$$\begin{aligned} F_{cond} &\approx -n_e \bar{v} (\varepsilon(x + l_e) - \varepsilon(x)) \\ &\approx -n_e \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{aligned} \quad (73)$$

donde $\varepsilon(x)$ es la energía promedio de los electrones en una posición/radio x . Para electrones no relativistas,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m_e \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT \quad \text{así que} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{3}{2} k \frac{\partial T}{\partial x} . \quad (74)$$

De lo anterior, deducimos

$$\lambda_c = \frac{3}{2} k n_e \bar{v} l_e . \quad (75)$$

- Si ahora consideramos la sección recta, σ , para la dispersión de los electrones por los iones, el trayecto medio libre será

$$l_e \approx \frac{1}{\sigma n_i}$$

donde n_i es la densidad de iones. Dada que la dispersión se debe a interacciones de Coulomb y si suponemos que la energía cinética de los electrones está relacionado a la separación entre electrones e iones, r_0 , tendríamos

$$\frac{1}{2} m_e \bar{v}^2 = \frac{Z e^2}{r_0} , \quad (\text{igualdad de energías cinética y potencial})$$

lo cual implica que la sección recta es

$$\sigma = \pi r_0^2 \approx \frac{4\pi Z^2 e^4}{9 k^2 T^2} \quad \text{si suponemos} \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \quad (\text{equilibrio termodinámico}). \quad (76)$$

Lo anterior nos permite eliminar el trayecto medio libre de la ecuación (75), produciendo

$$\lambda_c = \frac{27\sqrt{3}}{16\pi} \frac{k^{7/2}}{e^4 \sqrt{m_e}} \frac{A}{Z^2} (1 + X) T^{5/2} , \quad (77)$$

donde además supusimos

$$n_e = \frac{\rho(1+X)}{2m_H} \quad \text{y} \quad n_i = \frac{\rho}{Am_H}$$

con A siendo el número atómico.

- Si definimos la opacidad debido a la conducción electrónica como

$$\kappa_c = \frac{4acT^3}{3\rho\lambda_c} \quad \text{cm}^2/\text{g} ,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \kappa_c &\approx \frac{4ac}{3} \frac{16\pi}{27\sqrt{3}} \frac{e^4 \sqrt{m_e}}{k^{7/2}} \frac{(Z^2/A) \sqrt{T_7}}{(1+X) \rho} \\ &\approx 5 \times 10^3 \frac{(Z^2/A) \sqrt{T_7}}{(1+X) \rho/10} \end{aligned} \quad (78)$$

donde $T_7 = T \times 10^{-7}$ K y ρ es en g/cm^3 . Lo anterior es aproximadamente correcto dentro de un factor de 2-3 para plasmas no relativistas y no degenerados.

- Por otra parte, la conducción térmica es fundamental en plasmas relativistas degenerados. Las condiciones de relativista y degenerada implican dos cambios a lo anterior. Primero, sube notablemente la velocidad \bar{v} . Segundo, la degeneración reduce fuertemente la dispersión por los iones debido a la escasez de estados finales disponibles para los electrones dispersados. Esto aumenta el trayecto medio libre. Ambos efectos aumentan λ_c y reducen κ_c . Como resultado, la conducción térmica puede ser extremadamente eficiente (lo cual implica una opacidad muy baja) en condiciones degeneradas y relativistas. En el caso de extrema degeneración,

$$\kappa_c \approx 5 \times 10^{-3} \frac{(Z^2/A) T_7^2}{(1+X)^2 (\rho/10^5)^2} \Theta \quad (79)$$

donde Θ es un factor del orden de la unidad que corrige por interacciones electrón-ión de larga distancia.

La irrelevancia de la opacidad de líneas

- Anteriormente (ecuación 40), vimos que la distribución de energía en una línea es

$$I(\nu) = I_0 \frac{\gamma/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2} .$$

Dado que la absorción tendrá la misma distribución, deducimos que el coeficiente de absorción para la transición entre niveles n y m es

$$a_{nm}(\nu) = a_0 \frac{\gamma/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2} , \quad (80)$$

donde a_0 es la fuerza de la absorción en el centro de la línea y γ la anchura de la línea. En el caso de la ecuación 40, esta anchura fue la anchura natural,

$$\gamma = \nu_0^2 \frac{8\pi^2 e^2}{3m_e c^3} ,$$

pero, en general, esta anchura se deberá a otros procesos, como veremos. La normalización de la ecuación (80) requiere que

$$a_0 = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{nm}$$

donde f_{nm} es la fuerza de colisión de la transición definida anteriormente (ecuación 43). Como en el caso de los procesos de absorción continua que vimos antes, se puede definir una opacidad específica según

$$\kappa_{nm}(\nu) = \frac{n_m a_{nm}(\nu)}{\rho}$$

donde n_m es el número de átomos en el nivel inferior m y ρ la densidad.

- Aunque es factible considerar la opacidad de transiciones ligado-ligado, es fácil demostrar que representa una pequeña fracción de la opacidad total. Consideramos un plasma en equilibrio termodinámico que es totalmente opaco a la emisión en las transiciones ligado-ligado. En este caso extremo, el espectro resultante tendrá el aspecto de la siguiente gráfica. El continuo tiene la forma de emisión de cuerpo negro, salvo para las frecuencias de las transiciones ligado-ligado, donde la emisión es nula.

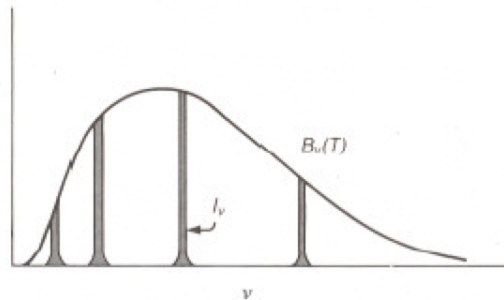


Figure 6.15. Line emission. Solid line is Planckian spectrum at temperature T . Individual lines (shaded) are emitted by matter at temperature T . Total intensity in lines is given by the shaded area.

- Geométricamente, las líneas ocupan una fracción pequeña del espectro. En el caso de líneas en el visible, $\nu \approx 10^{14}$ Hz mientras que la anchura natural es $\Delta\nu \approx 10^8$ Hz. Entonces, desde el punto de vista geométrico, las líneas pueden interceptar solamente una fracción

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 10^{-6}$$

del flujo total.

- Si además consideramos la definición de γ , vemos que el coeficiente de absorción (ecuación 80) depende de la frecuencia como ν^1 . El significado de esto es que la luz que vemos de las estrellas es emitida de la capa más fría, típicamente en el rango del visible (o ultravioleta o infrarrojo), así que la fracción del espectro interceptado por líneas será aun menor en el interior de la estrella donde las temperaturas son mayores y los fotones tienen frecuencias más altas.
- Por lo tanto, procesos de absorción continuo son más importantes para la opacidad integrado sobre todo el espectro en el interior de las estrellas donde la temperatura es alta.
- Por otra parte, el estudio detallado de las líneas de absorción o emisión es fundamental para entender la estructura de las atmósferas estelares y aun mucho más importante para el equilibrio térmico del medio interestelar.

La opacidad total

- La opacidad total es la suma de las fuentes de opacidad. Conceptualmente, es un cálculo sencillo, aunque en realidad muy complicado en la práctica.
- La siguiente figura presenta los regimenes de densidad y temperatura donde dominan las diferentes fuentes de opacidad.

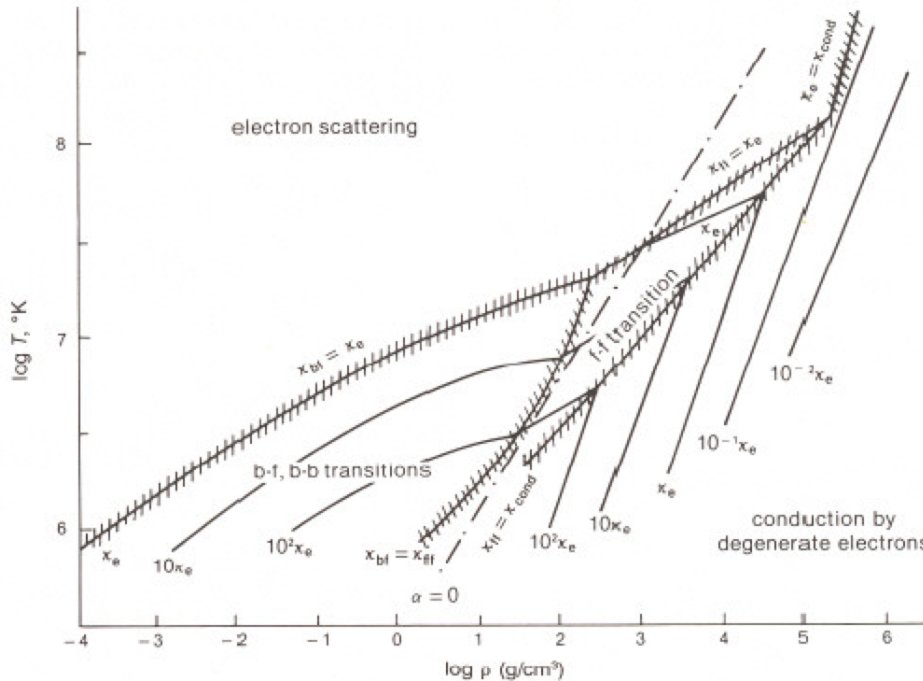


Figure 6.13. Stellar opacity in the ρ, T -plane for Population I stars. Cross-hatched lines denote boundaries at which the contributions from the two atomic process shown are equal.

- A alta temperatura, domina la dispersión por electrones, mientras que, a alta densidad, domina la conducción térmica. Dado que estos dos procesos no dependen de la frecuencia ni tienen un mecanismo que les apaga, se encuentran en muchas fases evolutivas de las estrellas. Cabe señalar que distintos procesos pueden dominar en diferentes partes de una estrella, particularmente en estrellas evolucionadas.
- A densidades bajas y temperaturas bajas, domina la opacidad debido a los procesos libre-libre y libre-ligado. Básicamente, estos procesos se vuelven muy ineficientes a temperaturas altas.
- La opacidad por transiciones moleculares o ligado-ligado son muy importantes en las atmósferas estelares, pero generalmente despreciable en los interiores.

El ensanchamiento de las líneas y la opacidad de líneas

Ensanchamiento natural de líneas

- Ya vimos como la vida media de un estado excitado produce una línea con una anchura “natural” debido fundamentalmente al principio de incertidumbre de la mecánica cuántica.
- El ensanchamiento natural impone una anchura mínima constante a cualquier línea.

- Usualmente, hay otros efectos que ensanchan la línea y la anchura natural resulta despreciable en comparación con la anchura producida por estos otros efectos.

Ensanchamiento de líneas por el efecto Doppler

- Otro efecto que es presente siempre es el efecto Doppler. Hay dos fuentes de este efecto. Primero, por la temperatura del plasma, el equilibrio termodinámico impondrá velocidades “térmicas” a los átomos o iones. Segundo, movimientos macroscópicos, como la convección, también producen velocidades diferenciales entre diferentes parcelas del plasma.
- Si dos átomos tienen una velocidad diferencial v , un fotón con frecuencia ν_0 emitido por uno de ellos tendrá una frecuencia, ν , distinta para el otro y dado por

$$\frac{\nu}{c} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \quad (81)$$

cuando $v \ll c$.

- Como resultado, un átomo en movimiento absorbe energía con frecuencias distintas a las que absorbe un átomo estacionario. En lugar de absorber a una frecuencia ν , absorberá a una frecuencia $\nu' = \nu(1 + v/c)$ y su coeficiente de absorción será dado por $a(\nu(1 + v/c))$ y no $a(\nu)$. Entonces, la absorción total a una frecuencia ν dependerá de la distribución de velocidades de los átomos o iones involucrados y el coeficiente de absorción según

$$a(\nu) = \int_0^{\infty} a(\nu(1 + v/c))f(v)dv \quad (82)$$

donde v es la velocidad del átomo o ión en la dirección del fotón (la velocidad proyectada) y

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} e^{-mv^2/kT} \quad (83)$$

es la distribución de Maxwell en una dimensión. Notar que m es la masa del átomo o ión.

- La cantidad

$$v_D = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (84)$$

es conocida como la **velocidad térmica de Doppler**.

- Introduciendo la expresión (83) en la ecuación (82), obtenemos

$$\begin{aligned} a(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_D} \int_0^{\infty} a(\nu(1 + v/c))e^{-mv^2/kT} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Delta\nu_D} \int_0^{\infty} a(\nu - \nu')e^{-\nu'^2/\Delta\nu_D^2} d\nu' \end{aligned} \quad (85)$$

donde

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0 v_D}{c} = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (86)$$

es la **anchura térmica** de la línea.

- Si, además de la velocidad térmica, existen movimientos turbulentos como los debido a la convección, se define la velocidad Doppler efectiva según

$$v_D^2 = \frac{2kT}{m} + v_T^2 \quad (87)$$

donde v_T es la velocidad microturbulenta. Esta formulación aplica cuando los movimientos turbulentos ocurren sobre una escala que es pequeña con respecto a la región (o la profundidad en la atmósfera) donde se forma la línea en cuestión.

Ensanchamiento por presión

- Las “colisiones” entre átomos e iones es otra fuente importante de ensanchamiento de las líneas. Las “colisiones” deben entenderse como interacciones eléctricas entre átomos o iones, las cuales esencialmente perturban sus niveles energéticos.
- La vida natural del estado excitado permite definir dos regímenes de colisiones, dependiendo de si la escala de tiempo para ellas es menor o mayor a la vida natural esperada para el estado.
 - Si la escala de tiempo para la interacción es menor a la vida natural del estado excitado, las colisiones pueden provocar que el átomo o ión excitado decaea más pronto que normalmente decaería. En este caso, es como si la transición tuviera una vida natural más corta y, por el principio de incertidumbre, una mayor incertidumbre en su energía, ensanchando la línea resultante. Generalmente, este es el caso de estrellas no tan calientes donde los átomos están neutros. En ese caso, la interacción es a través la fuerza de van der Waals, que depende de la distancia como r^{-6} , por lo que es importante solamente cuando los átomos son muy cercanos.
 - Si la escala de tiempo para la interacción excede la vida natural del estado, el campo eléctrico externo perturba los niveles energéticos del átomo o ión excitado. En este caso, la perturbación producida por el campo eléctrico externo dependerá de la distribución de distancias entre el átomo perturbado y sus vecinos. La suma de estas perturbaciones será una distribución de energías para una transición dada, lo cual producirá un ensanchamiento estadístico de la línea resultante. En las atmósferas de estrellas más calientes, el hidrógeno ionizado juega un papel importante en el ensanchamiento por presión. En este caso, el campo eléctrico sí es un campo de Coulomb y decae como r^{-2} . Dado que el campo de Coulomb decae menos rápido que el campo de van der Waals, las interacciones ocurren sobre escalas de tiempo más largo que llegan a rebasar la vida media de los estados excitados.
- El efecto del ensanchamiento por presión será no solamente de aumentar la anchura que la línea tendrá debido al ensanchamiento térmico, sino también de cambiar la forma. El cambio en la forma se debe a la convolución de las dos funciones de ensanchamiento, una parecida a la ecuación (80) y la otra de la forma de la ecuación (85).
- Matemáticamente, el resultado es

$$a(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_D} f \frac{\pi e^2}{m_e c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\Delta\nu - \Delta\nu')/\Delta\nu_D^2} \frac{\gamma/4\pi}{\Delta\nu'^2 - (\gamma/4\pi)^2} d\Delta\nu'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_D} f \frac{\pi e^2}{m_e c} H(\alpha, v) \quad (88)$$

donde f es la fuerza de colisión de la transición (no pusimos los sub-índices usuales) mientras que

$$\alpha = \frac{\gamma}{4\pi\Delta v_D} \quad \text{y} \quad v = \frac{\Delta v}{\Delta v_D} .$$

$H(\alpha, v)$ se conoce como la función de Voigt.

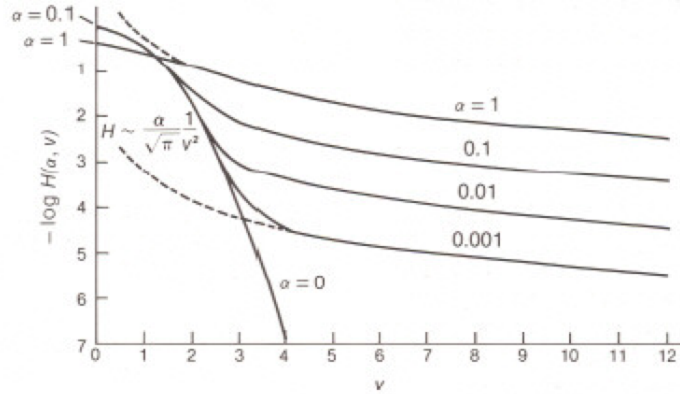


Figure 6.18. Voigt function $H(\alpha, v)$. SOURCE: A. Unsöld, *Physik der Sternatmosphären*, 2nd ed. (Berlin: Springer-Verlag, 1955).

- En el centro de la línea, domina el ensanchamiento térmico, así que

$$a(v_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_D} a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_D} f \frac{\pi e^2}{m_e c} \quad (89)$$

mientras que las alas tendrán la forma asintótica

$$H(\alpha, v) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{v^2} . \quad (90)$$

- En el caso de interacciones sobre escalas de tiempo más cortas que la vida media de la transición, el ensanchamiento por presión produce perfiles con alas mucho más extendidas como se ve en la gráfica anterior.

Ensanchamiento de las líneas de H y He

- En lo anterior, se supone que la escala temporal de las interacciones es mucho menor a la vida media del estado excitado. Físicamente, esto tiene sentido si los átomos que provocan las colisiones son neutros y entonces afectan al átomo excitado solamente cuando está muy cercano. Esto es razonable en atmósferas estelares de estrellas no muy calientes.
- En las atmósferas de estrellas calientes, mucho del hidrógeno está ionizado y los iones interactúan electrostáticamente. En este caso, la fuerza es de largo alcance y las interacciones tienen una escala temporal que excede la vida media del estado excitado. Aquí se trata del ensanchamiento Stark.

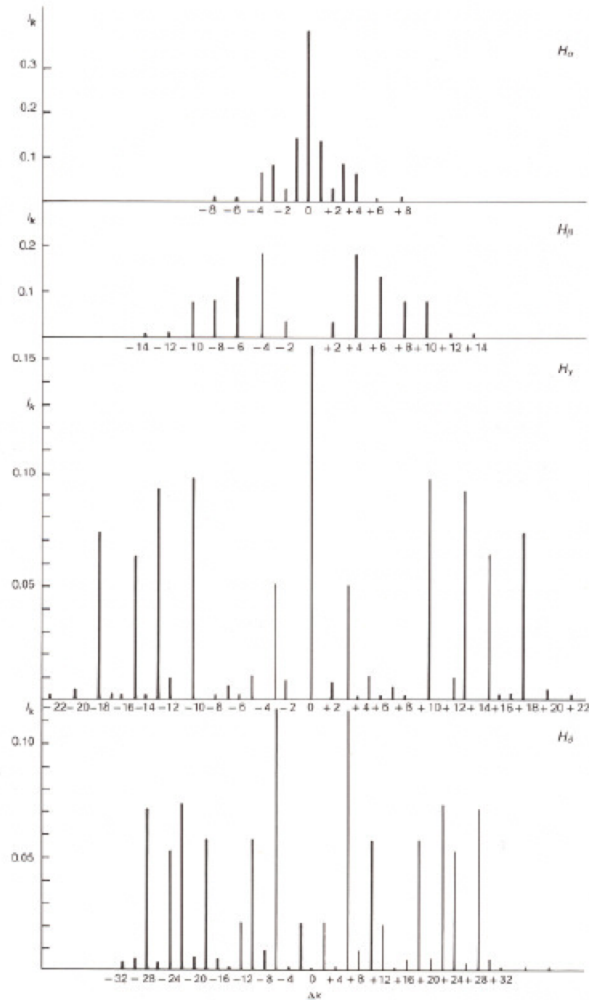


Figure 6.24. Relative intensity of Stark broadened hydrogen lines H_α through H_δ . SOURCE: A. Unsöld, *Physik der Sternatmosphären*, 2nd ed. (Berlin: Springer-Verlag, 1955).

- El campo eléctrico de los iones afecta a los niveles energéticos de los iones neutros (excitados en este caso), provocando una separación de los niveles como se ve en la gráfica anterior para las líneas H_α , H_β , H_γ y H_δ .
- En el caso del hidrógeno, la separación de estos subniveles es

$$\Delta\lambda = \frac{3h}{8\pi^2 m_e} \frac{\lambda^2}{c} n_k \mathcal{E} \tag{91}$$

donde \mathcal{E} es la fuerza del campo eléctrico y n_k un número entero que depende de los números cuánticos de los estados inicial y final. Cuando la separación de los niveles depende linealmente de la fuerza del campo eléctrico, como en el caso de la ecuación (91), el efecto se conoce como el efecto Stark lineal.

- El resultado de la descomposición de cada nivel en subniveles es un ensanchamiento de la línea, también produciendo alas extendidas.

La intensidad de líneas en los espectros estelares

- La razón que aparecen líneas de absorción en los espectros estelares es que las condiciones en la capa externa de la estrella son tales que favorecen transiciones ligado-ligado en ciertos átomos y moléculas.
- Si suponemos que esta capa externa tiene condiciones físicas constantes, la profundidad óptica es

$$\tau_\nu = \int_0^h k(\nu) dh = k(\nu)h \quad (92)$$

donde $k(\nu)$ es la opacidad y h el espesor de la capa externa (la atmósfera). En este caso, la intensidad de la radiación emergente de la atmósfera es

$$I_\nu(h) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} \quad (93)$$

donde $I_\nu(0)$ es la intensidad de la radiación con frecuencia ν en la base de la atmósfera.

- En la cercanía de una línea de absorción, la opacidad tendrá componentes debido a la opacidad continua y la opacidad de la transición ligado-ligado involucrado, $k_c(\nu)$ y $k_l(\nu)$, respectivamente

$$k(\nu) = k_c(\nu) + k_l(\nu) . \quad (94)$$

- Si normalizamos la intensidad del espectro a la intensidad del nivel del continuo, obtenemos un perfil como en la gráfica que sigue.
- Matemáticamente, como función de la frecuencia, el perfil normalizado es dado por

$$r(\nu) = \frac{I_\nu(0)e^{-(k_c(\nu)+k_l(\nu))h}}{I_\nu(0)e^{-k_c(\nu)h}} = e^{-k_l(\nu)h} \quad (95)$$

- Dada la discusión anterior, el perfil de la línea contiene una gran cantidad de información sobre las condiciones físicas en la región donde se forma esta línea de absorción. En particular, líneas fuertes muestrean un gran rango de profundidades en la atmósfera, sus alas siendo formadas en la profundidad extrema y la parte central en las capas más externas. En términos de la densidad, la opacidad es dada por

$$\begin{aligned} k_l(\nu) &= n_l a_l(\nu) \\ &= n_l(T, P)(1 - e^{-h\nu/kT})a_l(\nu) \end{aligned} \quad (96)$$

donde indicamos la transición por el índice l y el coeficiente de absorción es dada por la ecuación (85) o (88), dependiendo de si se trata de una línea débil o fuerte, respectivamente.

- Para el análisis de abundancias químicas, normalmente, se utiliza la anchura equivalente de la línea de absorción, definida como

$$W_\nu = \int_0^\infty (1 - r(\nu)) d\nu . \quad (97)$$

Esencialmente, la anchura equivalente es la anchura que tendría la línea si tuviera una forma cuadrada, es decir, si la intensidad fuera cero donde absorbe la línea y la línea no tuviera alas.

- Si se trata de una línea débil, una expansión Fourier de la ecuación (95) da

$$e^{-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

y entonces

$$r(\nu) \approx 1 - k_l(\nu)h .$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación (97), obtenemos

$$W_\nu = n_l(T, P)h(1 - e^{-h\nu/kT}) \int_0^\infty a_l(\nu) d\nu \quad (98)$$

y vemos que la anchura equivalente de la línea es proporcional al número de átomos a lo largo de la línea de vista, $n_l(T, P)h$, que pueden participar en la transición. En este caso, conforme aumenta el número de átomos a lo largo de la línea de vista, la anchura equivalente aumenta linealmente. Este resultado depende de que la absorción por la línea esté muy localizado cercano al centro de la línea para que se pueda despreciar la variación del factor exponencial sobre la anchura de la línea.

- Si se trata de una línea de absorción más fuerte, la expansión Fourier anterior es insuficiente. En este caso, suponemos que solamente contribuye el ensanchamiento térmico (con o sin microturbulencia), así que sustituimos la expresión (85) en la ecuación (95). En este caso, la ecuación (97) resulta

$$W_\nu = \int_0^\infty \left(1 - \exp \left(-n_l h \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}} a_l(\nu_0 - \nu) e^{-\nu^2/\Delta\nu_D^2} \right) \right) d\nu .$$

Si expandimos este resultado en una expansión Fourier, obtenemos

$$\begin{aligned} W_\nu &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \left(-n_l h \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}} \int_0^\infty a_l(\nu_0 - \nu) e^{-\nu^2/\Delta\nu_D^2} d\nu \right)^n \\ &= \Delta\nu_D \sqrt{\pi} C \left(1 - \frac{C}{2! \sqrt{2}} + \frac{C^2}{3! \sqrt{3}} - \frac{C^3}{4! \sqrt{4}} + \dots \right) \end{aligned}$$

donde

$$C = \frac{n_l h}{\Delta\nu_D} \int_0^\infty a_l(\nu_0 - \nu) e^{-\nu^2/\Delta\nu_D^2} d\nu .$$

Para valores grandes de C , la anchura equivalente tiene la forma asintótica

$$W_\nu \approx \Delta\nu_D \sqrt{\ln C} . \quad (99)$$

Dado que C es proporcional al número de átomos a lo largo de la línea de vista que son capaces de participar en la transición, vemos que la anchura equivalente crecerá muy lentamente con el aumento del número de átomos a lo largo de la línea de vista en este caso. Cuando sucede esto, la línea de absorción se satura y su anchura equivalente es casi constante.

- Para el caso de líneas muy fuertes, donde las alas de la línea son importantes, podemos hacer la suposición (algo extrema) que el coeficiente de absorción es dominada por la función de Voigt (ecuación 90). Sustituyendo esto en la ecuación (97), obtenemos

$$W_\nu = \int_0^\infty \Delta\nu_D (1 - e^{-(\alpha/\sqrt{\pi})(C/\nu^2)}) d\nu = \Delta\nu_D \sqrt{\alpha\pi^{1/2}C} \quad (100)$$

donde C tiene su definición anterior. Para líneas muy fuertes, entonces, la anchura

equivalente varía como la raíz cuadrada del número de átomos a lo largo de la línea de vista que pueden participar en la transición.

- Resumiendo lo anterior, la gráfica que sigue ilustra el comportamiento de la anchura equivalente conforme aumenta el número de átomos que participan en la transición.
 - Cuando el número de átomos que participan en la transición es pequeño, la anchura equivalente varía linealmente conforme aumenta el número de átomos a lo largo de la línea de vista.
 - En líneas de fuerza intermedia, este régimen lineal se satura cuando domina la parte debido al ensanchamiento térmico del coeficiente de absorción, y la anchura equivalente permanece casi constante.
 - Eventualmente, para líneas muy fuertes, las alas del perfil contribuyen de manera significativa y la anchura equivalente crece como la raíz cuadrada del número de átomos a lo largo de la línea de vista.

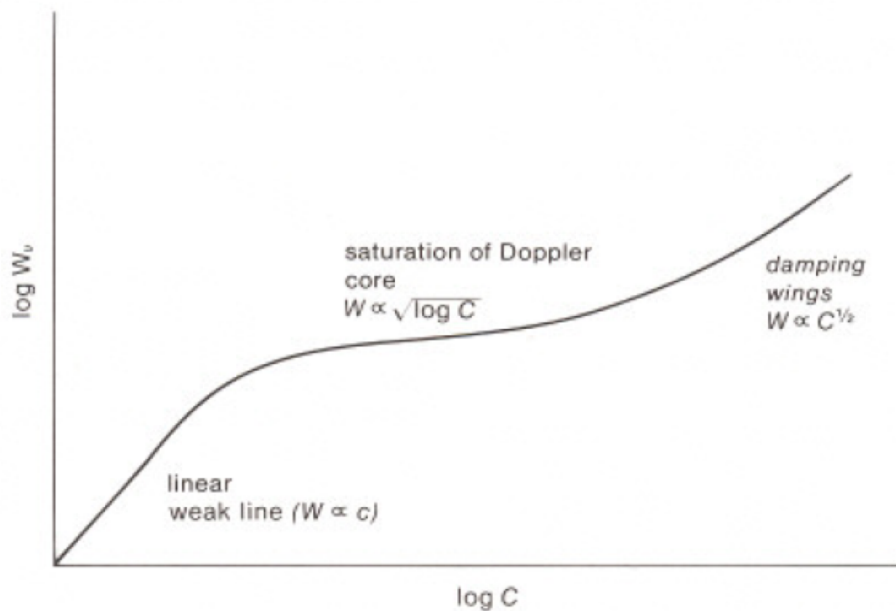


Figure 6.21. Equivalent line width (curve of growth) including saturation of the core and wing damping, versus optical depth at the line center (6.164).

- Los resultados anteriores son importantes en la determinación de las abundancias químicas en las atmósferas estelares.
 - Claramente, las líneas más útiles para determinar abundancias son las líneas débiles.
 - Si no existen líneas débiles de un elemento, luego conviene usar las líneas más fuertes, donde dominan las alas de la línea.
 - Es muy difícil determinar abundancias de líneas saturadas, porque su anchura equivalente es muy insensible al número de átomos a lo largo de la línea de vista. Naturalmente, los resultados en este caso son muy inciertos.
- El ensanchamiento por presión tiene dos efectos importantes. Primero, las alas anchas de las líneas hacen difícil la definición de la posición del continuo entre las líneas espectrales. Segundo, las alas no se saturan tan fácilmente como el centro de la línea, lo cual los hace muy importante para determinar abundancias químicas.

- Un ejemplo común del ensanchamiento por presión se debe a interacciones con el hidrógeno neutro en las atmósferas de estrellas frías. El átomo de hidrógeno neutro tiene un campo eléctrico importante, aunque no es un campo de Coulomb, sino de van der Waals. Decae típicamente como r^{-3} . Como resultado de la variación rápida de este campo eléctrico, producirá interacciones de corta distancia y duración temporal. Entonces, es un ejemplo del caso de una interacción que tendrá una escala de tiempo menor a la vida natural del estado excitado. Naturalmente, requiere la presencia de hidrógeno neutro, lo cual sucederá en las atmósferas de estrellas frías.
- Como punto aparte, es también notable que el campo de van der Waals es atractivo. Por lo tanto, un átomo de hidrógeno puede captar un electrón libre para formar el ión negativo de hidrógeno, H^- . La energía de ligadura de este ión es pequeña, de 0.75 eV. Existe solamente un estado ligado, lo cual implica que todas las transiciones en este ión son transiciones libre-ligado, ligado-libre o libre-libre. Las transiciones ligado-libre producen una opacidad sustancial a longitudes más cortas que $1.65 \mu m$ mientras que las transiciones libre-libre extienden esta opacidad a longitudes de onda más largas. El ión H^- es una fuente importante de opacidad en las atmósferas de estrellas como el Sol.