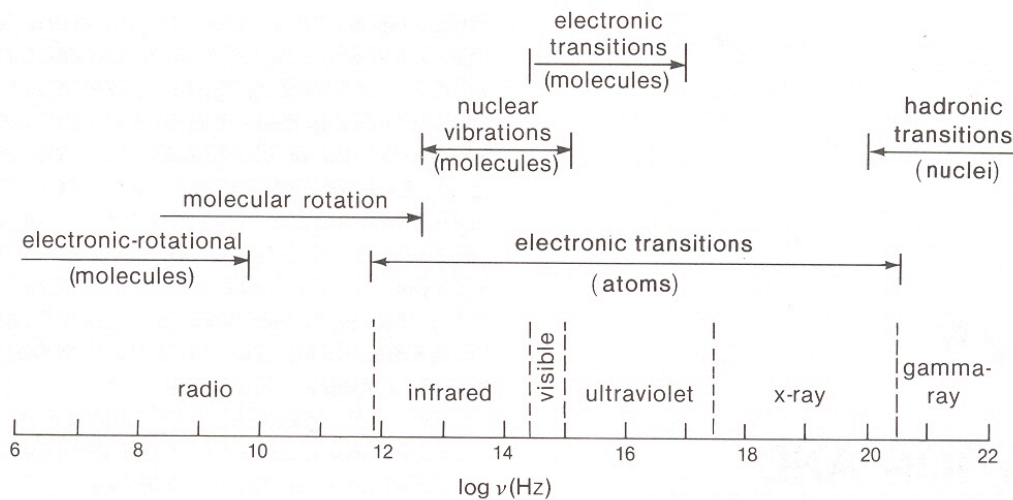


## La radiación y el transporte de la energía

- La interacción entre la radiación y el material juega un papel fundamental para establecer la estructura de las estrellas.
- La siguiente gráfica presenta los regímenes típicos donde núcleos atómicos, átomos y moléculas emiten y absorben energía.



**Figure 5.1.** Conventional frequency intervals of the electromagnetic spectrum. Horizontal bars indicate intervals associated with important quantum transitions.

- Aunque a veces es cómodo clasificar los objetos según las longitudes de ondas en las cuales emiten la mayoría de su energía, frecuentemente tal clasificación oculta lo parecido que son los procesos físicos en ellos.

### El transporte radiativo

- Ya vimos (capítulo 1) que la densidad de energía y el densidad de fotones para un cuerpo negro son

$$u = aT^4 \quad \text{y} \quad N_\gamma = 20T^3,$$

respectivamente, donde  $T$  es la temperatura. Deducimos entonces una energía por fotón del orden de

$$E_\gamma = \frac{aT}{20}.$$

Considerando una temperatura típica del interior solar,  $T = 5 \times 10^6$  K, esta energía corresponda a aproximadamente  $2 \times 10^{-9}$  erg, que corresponde a fotones de rayos X.

- No obstante, el Sol emite principalmente en el visible, fotones de lo cual tienen energías  $10^4$  veces menores que los de rayos X.
- La degradación de la energía de los fotones se debe al proceso de acoplamiento entre la radiación y la materia.
- Los fotones se difunden del interior hacia el exterior, típicamente viajando una distancia  $l$  entre interacciones con la materia. En estas condiciones, la distancia total

después de  $n$  interacciones es del orden de  $n^{1/2}l$ . Por lo tanto, del centro al exterior, los fotones interactúan del orden de

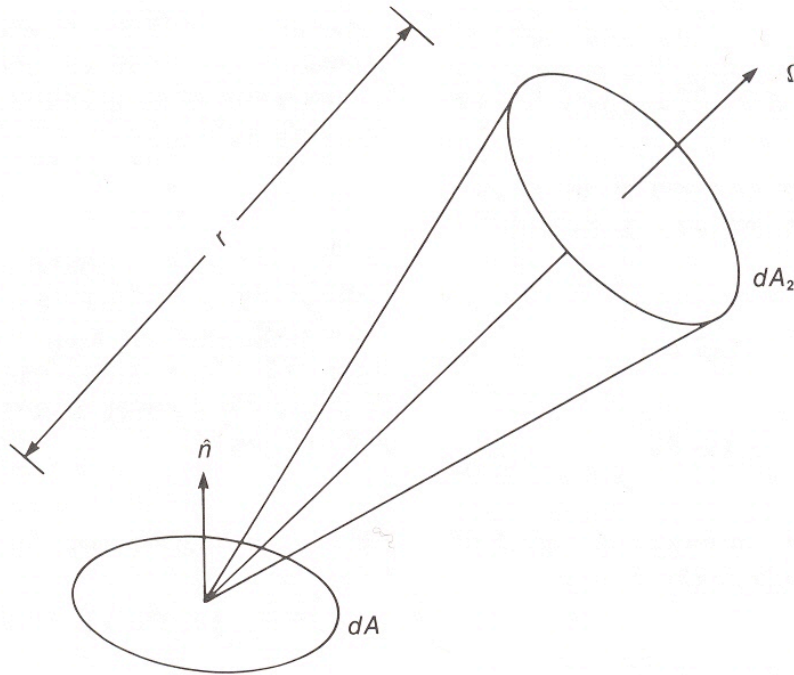
$$n \sim \left(\frac{R}{l}\right)^2$$

veces, donde  $R$  es el radio de la estrella. En el caso del Sol,  $l \sim 1$  cm en el interior, lo que implica del orden de  $10^{20}$  interacciones.

- Aunque estas interacciones se deben a procesos atómicos microscópicos, absorción, dispersión y emisión, se pueden describir en gran parte de manera macroscópica.

### Caracterización del campo radiativo

- En cualquier punto dentro de una estrella, los fotones con un rango de energías viajan en distintas direcciones. En un momento dado, estos fotones constituyen el campo radiativo a ese punto.
- Definiremos ahora unas cantidades que caracterizan a este campo radiativo.



**Figure 5.2.** Directional vectors describing an arbitrary radiation field originating from the surface element  $dA$ , traveling in direction  $\Omega$  and passing through a surface element  $dA_2$ . The distance between  $dA$  and  $dA_2$  is  $r$ , and  $\hat{n}$  is the normal to  $dA$ .

- Si consideramos un vector normalizado (de longitud 1.0)  $\vec{\Omega}$ , un área  $dA$  cuyo vector normal,  $\vec{n}$ , hace un ángulo  $\theta$  con  $\vec{\Omega}$ , el área proyectada perpendicular a  $\vec{\Omega}$  es  $dA_1 = \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dA$

- Suponemos que a una distancia,  $r$ , existe otro área,  $dA_2$ , cuyo vector normal es paralelo a  $\vec{\Omega}$ . Desde  $dA$ , esta segundo área subtende un ángulo sólido

$$d\Omega = \frac{dA_2}{r^2} .$$

- Ahora, si consideramos fotones con frecuencias entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$ , la energía que fluye entre  $dA$  y  $dA_2$  durante el intervalo temporal  $dt$  es

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{\Omega}) d\Omega dt d\nu \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dA, \quad (1)$$

donde  $I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  es la **intensidad monocromática** del campo radiativo en el punto  $\vec{r}$  al momento  $t$  y tiene unidades de  $\text{erg/s/cm}^2/\text{Hz/ster}$ .

- La energía total atravesando el área  $dA$  es el integral de la ecuación (1) sobre frecuencia

$$dE = dt dA \int_0^\infty I_\nu(\vec{\Omega}) \vec{n} \cdot \vec{\Omega} d\Omega d\nu .$$

Más frecuentemente, nos interesa en flujo de radiación,  $F_\nu$ ,

$$F = \int_0^\infty I_\nu(\vec{\Omega}) \vec{n} \cdot \vec{\Omega} d\Omega d\nu$$

- Obtenemos la densidad energética asociado al rayo con la intensidad monocromática  $I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  al considerar un volumen infinitésimo  $\Delta V$  en su alrededor. En un intervalo  $dt$ , el rayo viaja una distancia  $dl = c dt$ , lo cual nos permite reescribir la ecuación (1) como

$$dE_\nu = \frac{I_\nu(\vec{\Omega})}{c} d\Omega d\nu dV, \quad (2)$$

donde  $dV = \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dA dl$  es el elemento de volumen.

- La energía total en el volumen se obtiene al integrar la ecuación (2) sobre el volumen y el ángulo sólido. Cuando el volumen es pequeño,  $I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  es constante y obtenemos para la densidad energética

$$u_\nu d\nu = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \int_{\Omega} dE_\nu \approx \frac{1}{c} \int_{\Omega} I_\nu(\vec{\Omega}) d\Omega d\nu$$

al dividir por el volumen. Entonces, la **densidad radiativa** en un rayo de intensidad  $I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  es

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int_{\Omega} I_\nu(\vec{\Omega}) d\Omega .$$

- Dado que la radiación tiene momento, al rayo  $I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  está asociada una presión, que es la tasa de transporte de momento por unidad de área. Consideramos una unidad de área  $dA$  cuyo vector normal hace un ángulo  $\theta$  con respecto a la dirección del rayo. El momento de un fotón es

$$\frac{E}{c},$$

así que el flujo de momento asociado al rayo es

$$\frac{I_v(\vec{\Omega})}{c}$$

en la misma dirección que el rayo. El componente del momento perpendicular al área  $dA$  es entonces

$$\frac{I_v(\vec{\Omega})}{c} \cos \theta$$

mientras que el área proyectada de  $dA$  es  $\cos \theta$ . Por lo tanto, el flujo de momento perpendicular a  $dA$  asociado al rayo  $I_v(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  es

$$dP_v = \frac{I_v(\vec{\Omega})}{c} \cos^2 \theta$$

por unidad de tiempo, unidad de ángulo sólido y unidad de intervalo en frecuencia.

- La presión perpendicular a  $dA$  debido a fotones de energía  $h\nu$  es entonces

$$P_v = \int_{\Omega} \frac{I_v(\vec{\Omega})}{c} \cos^2 \theta d\Omega = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_v(\vec{\Omega}) u^2 d\mu = \frac{4\pi}{c} K_v \quad (3)$$

donde

$$K_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_v(\vec{\Omega}) u^2 d\mu \quad (4)$$

y la presión tiene unidades de  $\text{dyn/cm}^2/\text{Hz}$ .

- Otra cantidad de interés para caracterizar el campo radiativo es su **intensidad promedia**,  $J_v$ , que es el promedio de  $I_v(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  sobre el ángulo sólido

$$J_v = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} I_v(\vec{\Omega}) d\Omega. \quad (5)$$

- En los interiores estelares, frecuentemente nos interesa la **intensidad total**

$$I(\vec{\Omega}) = \int_0^{\infty} I_v(\vec{\Omega}) d\nu = \int_0^{\infty} I_{\lambda}(\vec{\Omega}) d\lambda.$$

- En el caso de un campo radiativo isotrópico,  $I_v(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  no depende de  $\vec{\Omega}$  y

$$P_v = \frac{4\pi}{3c} I_v, \quad u_v = \frac{4\pi}{c} I_v \quad \text{y} \quad J_v = I_v$$

de lo cual deducimos

$$P_v = \frac{1}{3} u_v. \quad (6)$$

Este último resultado es la esperada para partículas relativistas y no depende de la suposición de equilibrio termodinámico. La relación entre la presión y densidad total de la radiación se obtienen integrando (6)

$$P = \frac{1}{3} u.$$

- La **energía total** atravesando el área  $dA$  es el integral de la ecuación (1) sobre frecuencia

$$dE = dt dA \int_0^{\infty} I_v(\vec{\Omega}) \vec{n} \cdot \vec{\Omega} d\Omega d\nu.$$

- Más frecuentemente, nos interesa en **flujo de radiación**,  $\mathcal{F}_v$ ,

$$\mathcal{F}_v = \int_0^\infty I_v(\vec{\Omega}) \vec{n} \cdot \vec{\Omega} d\Omega dv \quad (7)$$

que tiene unidades de erg/s/cm<sup>2</sup>/Hz. Si usamos coordenadas esféricas polares, con  $\theta$  midiendo el ángulo polar desde el vector normal a  $dA$ ,

$$I_v(\vec{\Omega}) = I(\theta, \phi) \quad \text{y} \quad d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi,$$

permitiendo expresar la ecuación (7) como

$$\mathcal{F}_v = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi I_v(\theta, \phi) \sin\theta \cos\theta,$$

donde el último factor se debe a la proyección. Esta formulación permite su separación en dos “mitades” opuestas

$$\mathcal{F}_v^+ = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi I_v(\theta, \phi) \sin\theta \cos\theta$$

$$\mathcal{F}_v^- = - \int_{\pi/2}^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi I_v(\theta, \phi) \sin\theta \cos\theta$$

Notar que  $\mathcal{F}_v^-$  es positivo, por definición. En el caso de un campo isotrópico,

$$\mathcal{F}_v^+ = \mathcal{F}_v^- = I_v \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \pi I_v,$$

y el flujo total es cero, como se espera.

- Lo anterior es particularmente útil en las atmósferas, donde uno puede usualmente suponer que el campo radiativo es angularmente simétrico con respecto al eje radial (la coordenada  $\phi$ ), lo cual implica

$$I_v(\vec{\Omega}) = I_v(\theta)$$

y, por lo tanto

$$J_v = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi I_v(\theta) \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_v(\mu) d\mu$$

$$\mathcal{F}_v = \pi F_v = 2\pi \int_{-1}^1 I_v(\mu) d\mu$$

$$\mathcal{F}_v^+ = \pi F_v^+ = 2\pi \int_0^1 I_v(\mu) d\mu$$

$$\mathcal{F}_v^- = \pi F_v^- = 2\pi \int_{-1}^0 I_v(\mu) d\mu$$

donde  $\mu = \cos\theta$  como antes.

## Opacidad y emisividad

- Hasta ahora hemos considerado las propiedades de la radiación. También es necesario considerar las propiedades de la materia y como afectan a su interacción con la radiación.

- Los tres procesos que intervienen para un rayo  $I_\nu(\vec{\Omega})$  y la materia por la que atraviesa son la absorción, la emisión y la dispersión de fotones.
  - La absorción de fotones quita energía de  $I_\nu(\vec{\Omega})$  y calienta al gas. La **absorción “pura”** se define como la absorción de un fotón por un átomo o molécula donde la energía del fotón es utilizada para aumentar la energía térmica del material.
  - La dispersión de fotones originalmente moviéndose en la dirección  $\vec{\Omega}$  hacia otra dirección  $\vec{\Omega}'$  quita fotones de  $I_\nu(\vec{\Omega})$ , pero los añade a otro rayo  $I_\nu(\vec{\Omega}')$ . De la misma manera fotones de otros rayos  $I_\nu(\vec{\Omega}')$  pueden ser dispersados para contribuir a  $I_\nu(\vec{\Omega})$ . En el proceso de dispersión, la energía del fotón regresa aproximadamente inmediatamente al campo radiativo. En el caso más sencillo, el proceso es isotrópico, es decir, no hay correlación entre las direcciones inicial y final del fotón. Aquí, también supondremos que el proceso es elástico o coherente, implicando que la energía del fotón dispersado es igual a la del fotón incidente. En el caso de **dispersión “pura”**, el proceso de dispersión ni aumenta ni reduce la energía térmica del material.
  - La emisión contribuye fotones al rayo  $I_\nu(\vec{\Omega})$ . Al igual al caso de absorción, definimos **emisión “pura”** cuando la emisión de un fotón resulta en un decremento en la energía térmica del material.
- La absorción y dispersión de fotones constituyen la opacidad de la materia mientras que la emisión contribuyen a su emisividad.

## Opacidad

- Consideramos una rebanada infinitamente delgada de material perpendicular a un rayo cuyo espesor es  $ds$ .
- Dado que la interacción de la radiación con la materia es de naturaleza estadística, existe una cierta probabilidad por unidad de distancia que un fotón será absorbido o dispersado. Esta probabilidad es la **opacidad** de la materia (también conocido como su coeficiente total de extinción), usualmente indicado por  $k_\nu$ .
- La opacidad tiene unidades de área dividido por unidad de volumen, o sea  $\text{cm}^{-1}$  y es inversamente proporcional a la trayectoria media libre.
- Se puede definir una **opacidad específica**,  $\kappa_\nu$ , definido como  $\kappa_\nu \rho = k_\nu$ . La opacidad específica tiene unidades de  $\text{cm}^2/\text{g}$ .
- Finalmente, la opacidad por partícula, o la **sección recta** de las partículas, es dada por 
$$\sigma_\nu = \frac{\kappa_\nu \rho}{n},$$
 donde  $n$  es número de partículas por unidad de volumen ( $\text{cm}^{-3}$ ). La sección recta es la medida más apropiada para el desarrollo del tratamiento microscópico de la opacidad.
- Otra manera de ver lo anterior es considerar que cada partícula tiene una probabilidad de interacción con la radiación, que es su sección recta,  $\sigma_\nu$ . Entonces, la probabilidad total para dispersar fotones que presenta una rebanada de material de grosor  $ds$  con  $n$  partículas por unidad de volumen es  $n\sigma_\nu ds$ . Esta es también la fracción de fotones pasando por este volumen que serán absorbidas o dispersadas, así

que la opacidad por unidad de distancia es

$$k_\nu = \kappa_\nu \rho = n\sigma_\nu .$$

- Notar que  $k_\nu$ ,  $\kappa_\nu$  y  $\sigma_\nu$  son funciones de la frecuencia, pero no son distribuciones en frecuencia (como lo son  $I_\nu(\vec{\Omega})$  o  $F_\nu$ ), así que no contienen unidades de frecuencia.

En particular,

$$k_\nu = k_\lambda, \quad \text{donde } \lambda = \frac{c}{\nu} .$$

- Podemos dividir la opacidad total,  $k_\nu$ , en componentes debido puramente a la dispersión,  $k_\nu^s$ , y puramente a la absorción,  $k_\nu^a$ .
- La energía total perdida de un rayo  $I_\nu(\vec{\Omega})$  después de viajar una distancia  $ds$  es
 
$$dI_\nu(\vec{\Omega}) = -I_\nu(\vec{\Omega})k_\nu ds \equiv -I_\nu(\vec{\Omega})d\tau_\nu , \quad (8)$$

donde la última etapa define la **profundidad óptica** de la materia

$$d\tau_\nu = k_\nu ds = \frac{ds}{l_\nu} ,$$

donde  $l_\nu$  es la **trayectoria media libre** de fotones con frecuencia  $\nu$  en la materia.

Cuando

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^{s_1} k_\nu ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{l_\nu} \approx 1 ,$$

los fotones en el rayo habrán viajado suficiente distancia para ser dispersados o absorbidos. Si  $\tau_\nu \gg 1$ , el material es opaco y los fotones habrán interactuado muchas veces con la materia antes de atravesar la distancia  $\Delta s = s_1 - s_0$ . Al contrario, si  $\tau_\nu \ll 1$ , el material es transparente,  $l_\nu \gg \Delta s$ , y los fotones no interactuarán al viajar la distancia  $\Delta s$ .

- Si la absorción y dispersión son los únicos procesos relevantes, el cambio en  $I_\nu(\vec{\Omega})$  después de viajar una distancia  $s$  integrando la ecuación (8):

$$I_\nu(s) = I_\nu(0) \exp\left(-\int_0^s k_\nu(s') ds'\right) = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu(s)) . \quad (9)$$

- Para relacionar  $\tau_\nu(s)$  a la distancia física viajado por el rayo, es necesario especificar  $k_\nu$ , lo cual usualmente depende de la densidad y temperatura. La evaluación de la ecuación (9) es complicada cuando las condiciones físicas, densidad y temperatura, son funciones de la posición en el medio.

## Emisividad

- Además de absorber o dispersar radiación, la materia puede emitir radiación. Los átomos pueden convertir energía térmica a radiación o puede resultar de la absorción previa de un fotón.
- Macroscópicamente, la **emisividad** es dada por  $j'_\nu(\vec{\Omega})$ , la radiación emitida por unidad de volumen, por unidad de tiempo, por unidad de ángulo sólido, por unidad de frecuencia y en la dirección  $\vec{\Omega}$ . La emisividad tiene unidades de  $\text{erg/s/cm}^3/\text{Hz/ster}$ .

- El cambio de un rayo  $I_v(\vec{\Omega})$  al viajar una distancia  $ds$  en material con una emisividad  $j'_v(\vec{\Omega})$  es dada por
 
$$dI_v(\vec{\Omega}) = j'_v(\vec{\Omega}) ds . \quad (10)$$

- La emisión puede ser espontánea, la tendencia natural de un sistema cuántica en llegar a su estado de reposo, o estimulado, en cuyo caso depende del número de fotones, y por tanto depende de  $I_v(\vec{\Omega})$ , en la vecindad de un átomo capaz de emitir un fotón con energía  $h\nu$ .
- Como notamos, la dispersión puede tanto quitar como aumentar el número de fotones en un rayo  $I_v(\vec{\Omega})$ . El aumento debido a la dispersión es

$$dI_v(\vec{\Omega}) = \int_{\Omega'} k_v^s I_v(\vec{\Omega}') \frac{d\Omega'}{4\pi} ds \quad (11)$$

al viajar una distancia  $ds$ . Si la dispersión es isotrópica, lo anterior se simplifica

$$dI_v(\vec{\Omega}) = k_v^s J_v ds , \quad (12)$$

donde  $J_v$  es la intensidad promedia. Si relajamos la condición de dispersión isotrópica, tenemos

$$dI_v(\vec{\Omega}) = \int_{\Omega'} k_v^s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') I_v(\vec{\Omega}') \frac{d\Omega'}{4\pi} ds . \quad (13)$$

Igualmente, se puede permitir también la dispersión inelástica, donde los fotones incidentes y dispersados tienen energías distintas

$$dI_v(\vec{\Omega}) = \int_{\nu'} \int_{\Omega'} k^s(\nu, \vec{\Omega}, \nu', \vec{\Omega}') I_{\nu'}(\vec{\Omega}') \frac{d\Omega'}{4\pi} d\nu' ds , \quad (14)$$

pero en este caso cabe señalar que ya no es un caso de dispersión pura, porque el cambio de energía implica que el material gana o pierde energía térmica en el proceso.

## **La ecuación de la transferencia de radiación**

- Podemos resumir lo anterior sumando los efectos posibles al rayo  $I_v(\vec{\Omega})$  al atravesar una rebanada de material de espesor  $ds$  como

$$\frac{dI_v}{ds} = \left( \frac{dI_v}{ds} \right)_{\text{absorción}} + \left( \frac{dI_v}{ds} \right)_{\text{dispersión}} + \left( \frac{dI_v}{ds} \right)_{\text{emisión}} ,$$

donde la ecuación (8) da los términos debidos a la absorción y dispersión fuera del rayo, la ecuación (10) da el término debido a la emisión y uno de las ecuaciones (11-14) da el término que contribuye la dispersión a la emisión en el rayo. Explícita y más generalmente

$$\frac{dI_v(\vec{\Omega})}{ds} = -(k_v^s + k_v^a) I_v(\vec{\Omega}) + j'_v(\vec{\Omega}) + \int_{\nu'} \int_{\Omega'} k^s(\nu, \vec{\Omega}, \nu', \vec{\Omega}') I_{\nu'}(\vec{\Omega}') \frac{d\Omega'}{4\pi} d\nu' . \quad (15)$$

- De manera más compacta, se puede expresar

$$\frac{dI_v(\vec{\Omega})}{ds} = -k_v I_v(\vec{\Omega}) + j_v(\vec{\Omega}) , \quad (16)$$



donde  $j_v(\vec{\Omega})$  comprende los últimos dos términos de la ecuación (15) y  $k_v$  es la opacidad total.

- Al inicio, notamos que  $I_v(\vec{\Omega})$  realmente depende de las coordenadas y tiempo, o sea  $I_v(\vec{\Omega}) = I_v(\vec{\Omega}, \vec{r}, t)$ . Por lo tanto

$$\frac{dI_v(\vec{\Omega})}{ds} = \left( \frac{\partial I_v}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial I_v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right) \frac{dt}{ds} = \frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I_v ,$$

donde el factor que precede la última forma se debe a

$$\frac{ds}{dt} = c \quad \text{y} \quad \frac{dx_i}{dt} = c\Omega_i ,$$

el índice  $i$  indicando los componente de cantidades vectoriales.

- Entonces, la ecuación de transferencia de radiación es entonces

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I_v = -k_v I_v + j_v . \quad (17)$$

- En estado estacionario,

$$\frac{\partial I_v}{\partial t} = 0$$

y si notamos que

$$d\tau_v = k_v ds ,$$

podemos escribir la ecuación de la transferencia de radiación en la forma

$$\frac{dI_v}{d\tau_v} = -I_v + \frac{j_v}{k_v} = -I_v + S_v \quad (18)$$

donde  $S_v$  se llama la “función de fuente”. Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (18) por  $e^{\tau_v}$ , se puede integrar

$$e^{\tau_v} \left( \frac{dI_v}{d\tau_v} + I_v \right) = \frac{d}{d\tau_v} e^{\tau_v} I_v = e^{\tau_v} \frac{j_v}{k_v} .$$

Si medimos desde  $\tau_v = 0$ , obtenemos

$$I_v(\tau_v) = I(0)e^{-\tau_v} + \int_0^{\tau_v} \frac{j_v}{k_v} e^{(\tau_v - \tau_v')} d\tau_v' . \quad (19)$$

Notar que lo anterior no depende de que el gas esté en equilibrio térmico.

- La interpretación física de la ecuación (19) es clara. La intensidad en un punto  $\tau_v$  depende de la intensidad inicial, atenuado por un factor de  $e^{-\tau_v}$  debido a la absorción y la dispersión, y de la emisión resultante de todos puntos intermedios,  $\tau_v'$ , también atenuados por la profundidad óptica  $e^{-(\tau_v - \tau_v')}$  a lo largo de estas trayectorias parciales.
- En el caso de estado estacionario y con un campo radiativo axialmente simétrico, como sucede en las atmósferas estelares,

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla I_v = \cos\theta \frac{dI_v}{dx} = \mu \frac{dI_v}{dx}$$

y entonces la ecuación de la transferencia de la radiación resulta

$$\mu \frac{dI_v}{d\tau_v} = -I_v + S_v . \quad (20)$$

Si multiplicamos por el elemento de ángulo sólido,  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ , e integramos,

$$\frac{d}{d\tau_v} \int_{-1}^1 \mu I_v d\mu = \int_{-1}^1 I_v d\mu - \int_{-1}^1 S_v d\mu \quad \circ \quad -\frac{1}{2} \frac{dF_v}{d\tau_v} = 2J_v - \int_{-1}^1 S_v d\mu .$$

Si además la función de fuente es simétrica,

$$-\frac{1}{4} \frac{dF_v}{d\tau_v} = J_v - S_v . \quad (21)$$

- Si multiplicamos la ecuación (20) por otro factor de  $\mu$  antes de integrar sobre el ángulo sólido,

$$\frac{d}{d\tau_v} \int_{-1}^1 \mu^2 I_v d\mu = \int_{-1}^1 \mu I_v d\mu - \int_{-1}^1 \mu S_v d\mu$$

o

$$-2 \frac{dK_v}{d\tau_v} = \frac{F_v}{2} - \int_{-1}^1 \mu S_v d\mu . \quad (22)$$

Si la función de fuente es simétrica, desaparece el segundo término a la derecha y obtenemos

$$-\frac{dK_v}{d\tau_v} = \frac{F_v}{4} .$$

Dado que  $K_v$  está relacionado con la presión radiativa, ecuación (3), obtenemos

$$\pi F_v = -4\pi \frac{dK_v}{d\tau_v} = -c \frac{dP_v}{d\tau_v} \quad (23)$$

de lo cual aprendemos que el flujo radiativo es proporcional al gradiente de la presión radiativa.

- En los interiores, nos interesa principalmente el flujo total,  $\pi F$ ,

$$\pi F = \int_0^\infty \pi F_v d\nu = -c \int_0^\infty \frac{1}{k_v} \frac{dP_v}{ds} d\nu \quad (24)$$

y sería conveniente poder expresarlo en términos de la presión radiativa total,  $P_R$

$$P_R = \int_0^\infty P_v d\nu .$$

Si definimos una opacidad promedio,  $\bar{k}$ , promediada sobre la frecuencia

$$\frac{1}{\bar{k}} \int_0^\infty \frac{dP_v}{ds} d\nu = \int_0^\infty \frac{1}{k_v} \frac{dP_v}{ds} d\nu ,$$

la ecuación (24) deviene

$$\pi F = -\frac{c}{\bar{k}} \frac{dP_R}{ds} \quad (25)$$

que es una de las formas más útiles de la ecuación de la transferencia de la radiación en los interiores estelares.

## **La radiación de cuerpo negro**

- En lo anterior, no existe ningún requisito de equilibrio termodinámico. Consideramos ahora este caso. Ya sabemos que, dentro de una cavidad en equilibrio termodinámico, los fotones tendrán una distribución característica de un cuerpo negro.

- La distribución de un cuerpo negro es

$$I_\nu \equiv B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (26)$$

en unidades de frecuencia o

$$I_\lambda \equiv B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (27)$$

en unidades de longitud de onda.

- Las otras cantidades ya definidas son

$$\begin{aligned} J_\nu &= B_\nu(T) & K_\nu &= \frac{1}{3} B_\nu(T) \\ F_\nu^+ &= F_\nu^- = B_\nu(T) & P_\nu &= \frac{4\pi}{3c} B_\nu(T) \\ F_\nu &= 0 & u_\nu &= \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) \end{aligned} \quad (28)$$

- Integrando sobre frecuencia

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2k^4 \pi^4}{15h^3 c^2} T^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4 = \frac{uc}{4\pi} \quad (29)$$

donde  $u$  es la densidad radiativa.

- Si suponemos que el equilibrio termodinámico aplica en los interiores estelares, podemos sustituir la presión de (28) en la ecuación (24) para derivar

$$\pi F = -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{ds} d\nu. \quad (30)$$

- De nuevo, podemos definir una opacidad promedio

$$\frac{1}{\bar{k}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} \quad (31)$$

que se conoce como la **opacidad de Rosseland**.

- Dado que

$$\begin{aligned} \frac{dB_\nu}{dT} &= \frac{4\sigma}{\pi} T^3, \\ \pi F &= -\frac{4ac}{3\bar{k}} T^3 \frac{dT}{ds}. \end{aligned}$$

- En el interior estelar, reemplazamos  $s$  con  $r$  y definimos la cantidad  $L(r)$ , la luminosidad atravesando un radio  $r$ , y usamos la definición  $L(r) = 4\pi r^2 \pi F$  para obtener

$$L(r) = -\frac{16\pi ac}{3\bar{k}} r^2 T^3 \frac{dT}{dr}, \quad (32)$$

que es la ecuación de la transferencia de la radiación apropiado para los interiores estelares.

- Al absorber radiación, la materia es acelerada. Podemos reescribir la ecuación (32) como

$$\frac{\bar{\kappa}L(r)}{4\pi r^2 c} = -\frac{d}{dr} \frac{1}{3} aT^4 = -\frac{dP_R}{dr}. \quad (33)$$

Como vimos en el caso de la presión debido al gas, la fuerza ejercido por una presión sobre una cáscara esférica es el gradiente de la presión, es decir el último resultado anterior.

- Podemos entonces definir una aceleración radiativa,

$$a_R = \frac{\bar{\kappa}L(r)}{4\pi r^2 c}, \quad (34)$$

donde utilizamos la opacidad de Rosseland específica,

$$\bar{\kappa} = \frac{\bar{\kappa}}{\rho}.$$

- Normalmente la aceleración radiativa es minúscula, pero existen casos cuando la opacidad o luminosidad es alta y puede llegar a desestabilizar la estrella. Es este efecto que nos lleva al límite de luminosidad para estrellas masivas o muy evolucionadas. Se puede derivar la luminosidad de Eddington requiriendo que la aceleración radiativa iguale la aceleración gravitatoria,

$$a_R = \frac{m(r)G}{r^2},$$

lo cual implica

$$L(r) = \frac{4\pi c G M_\odot}{\bar{\kappa}} \frac{m(r)}{M_\odot} \quad \text{o} \quad L_{Ed} = \frac{5 \times 10^{37} M}{\bar{\kappa} M_\odot}.$$

En el caso de que la opacidad es por dispersión electrónica,  $\bar{\kappa} \approx 0.33$  y

$$L_{Ed} = 1.5 \times 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \text{ erg/s.}$$

- Notamos que la condición de equilibrio termodinámico no es estrictamente válida en los interiores estelares, porque las estrellas emiten luz. Sin embargo, el flujo radiativo es pequeño en comparación con la densidad energética del campo radiativo, lo cual implica que el campo radiativo es casi isotrópico y el espectro muy parecido al espectro de un cuerpo negro verdadero. Como consecuencia, las condiciones son muy cercanas a la condición de equilibrio termodinámico.
- Sin embargo, no requerimos equilibrio termodinámico a escala de la estrella, sino solamente localmente, porque las ecuaciones de la estructura estelar son locales. Esto nos lleva al concepto de **equilibrio termodinámico local (LTE)**: que el campo radiativo tenga un espectro planckiano (de cuerpo negro) localmente con una temperatura  $T$ .

## Equilibrio radiativo

- En una parte de la estrella donde se genera energía, por reacciones nucleares por ejemplo, la adición en luminosidad a un radio  $r$  de la generación de energía en una cáscara de espesor  $dr$  es

$$dL = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr, \quad (35)$$

donde  $\epsilon$  es la tasa de generación de energía por unidad de masa.

- La energía pasando una superficie esférica de radio  $r$  es  $L(r)$ . El aumento de energía en pasar por una cáscara a radio  $r$  a otra a radio  $r + dr$  debe representar energía

producida localmente según la ecuación (35)

$$L(r + dr) - L(r) = \frac{dL}{dr} dr = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr \quad \text{o} \quad \frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon . \quad (36)$$

- La ecuación (36) se conoce como la ecuación de generación de energía. La tasa de generación,  $\epsilon$ , depende de las condiciones locales,

$$\epsilon = \epsilon(\rho, T, C) \quad \text{erg/g/s} , \quad (37)$$

donde C representa la composición química.

- En las estrellas, se puede transportar energía por varios mecanismos, como son la radiación, la convección u otros. En este caso

$$L(r) = L(r)_{\text{radiación}} + L(r)_{\text{convección}} + \dots \quad (38)$$

- En la ecuación (38), la ecuación de transferencia de radiación se aplica únicamente al término debido a la radiación. Por otra parte, es la luminosidad total que aparece en la ecuación de generación de energía.

- Cuando una estrella evoluciona cuasi-estáticamente, donde es importante la contracción o expansión de la estrella, es necesario considerar la transferencia de calor

$$dQ = T ds ,$$

donde  $s$  es la entropía. En este caso, la ecuación (36) deviene

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \left( \epsilon - T \frac{ds}{dr} \right) . \quad (39)$$

donde el signo es resultado de la definición de la entropía.

## **Atmósferas estelares sencillas**

- El transporte de energía en las atmósferas de muchas estrellas es por radiación.
- Otras simplificaciones es la ausencia de la generación de energía y la constancia de la estructura de la estrella (masa, radio, luminosidad).
- Por otra parte, es probable que las condiciones no satisfacen las condiciones de equilibrio termodinámico local, porque  $I_\nu$  es necesariamente no planckiano cercano a la superficie.
- Consideramos una atmósfera en equilibrio radiativo con flujo total

$$F = \frac{\sigma}{\pi} T_{ef}^4 , \quad (40)$$

donde  $T_{ef}$  es la temperatura efectiva.

- Si medimos la profundidad óptica desde la superficie exterior hacia adentro, la relación entre el flujo y presión (ecuación 25) implica

$$c \frac{dP_R}{d\tau} = \sigma T_{ef}^4 . \quad (41)$$

Dada la convención para la profundidad óptica,  $d\tau = -\bar{k} dh$ , donde  $h$  es la altura en la atmósfera.

- Dado que el flujo es constante, se puede integrar la ecuación (41)

$$P_R = \frac{\sigma}{c} T_{ef}^4 (\tau + q) , \quad (42)$$

donde  $q$  es un constante de integración que determinamos a partir de la presión en la superficie,

$$q = \frac{c}{\sigma T_{ef}^4} P_R(\text{superficie}) .$$

Recordamos que la ecuación (41) contiene la suposición de que la función de fuente es simétrica. Si además adoptamos la suposición de LTE, tendríamos una expresión para la presión en la superficie. Aunque LTE es una buena aproximación en interiores, con frecuencia es una mala suposición en atmósferas. No obstante, nos provee una pista, aunque el resultado sea solamente indicativo. En la superficie de la estrella, la radiación fluye solamente en una dirección. En ese caso, la presión radiativa será solamente la mitad de lo usual en LTE, o sea

$$P_R(\text{superficie}) = \frac{2\sigma}{3c} T_{ef}^4 ,$$

de lo cual deducimos

$$q = \frac{2}{3} , P_R = \frac{\sigma}{c} T_{ef}^4 \left( \tau + \frac{2}{3} \right) \text{ y } T^4 = \frac{3}{4} T_{ef}^4 \left( \tau + \frac{2}{3} \right) . \quad (44)$$

Ahora que hemos usado LTE para determinar la presión la opacidad promedio a usar es la opacidad de Rosseland.

- De la ecuación (44), vemos que la temperatura efectiva se alcanza a una profundidad óptica  $\tau = 2/3$  y que la temperatura en la superficie es más baja. Aunque el modelo es aproximado, estas características son típicas de estrellas verdaderas.
- Lo anterior provee el perfil de temperatura en la atmósfera. Para determinar también los perfiles de presión y densidad, tenemos que usar la condición de equilibrio hidroestático. Como ya discutimos, en la atmósfera, podemos suponer la masa total de la estrella,  $M$ , y su radio total,  $R$ , lo cual implica

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{MG}{R^2} \rho = -g\rho ,$$

donde  $h$  es la “altura” en la atmósfera. Si dividimos ambos lados por  $\bar{k}$ , la opacidad promedio, obtenemos

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g\rho}{\bar{k}} , \quad (45)$$

- donde notamos que el cambio de signo se debe a que la profundidad óptica,  $\tau$ , y la altura,  $h$ , crecen en direcciones opuestas. En este caso, la opacidad es la opacidad promedio de Rosseland.
- No se puede integrar la ecuación (45) hasta conocer como varía la profundidad óptica en función de la altura. Si fuera constante, lo que implica que es independiente de la temperatura y densidad, sí se puede integrar la ecuación (45) para obtener

$$P = P_0 \exp\left( \frac{g\mu m_H}{\bar{k}} \int_0^\tau \frac{d\tau'}{kT(\tau')} \right) \quad (46)$$

y

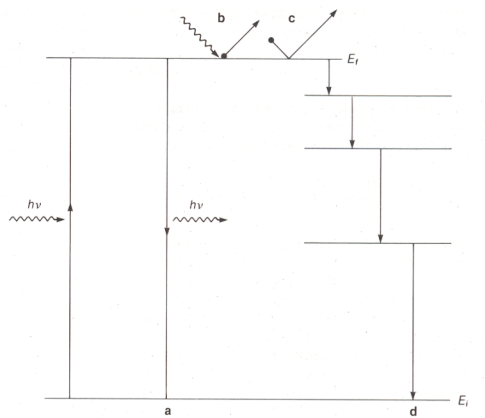
$$\rho = P_0 \frac{\mu m_H}{k} \frac{1}{T(\tau)} \exp\left( \frac{g\mu m_H}{\bar{k}} \int_0^\tau \frac{d\tau'}{kT(\tau')} \right) , \quad (47)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann y  $\bar{k}$  la opacidad promedio.

## Absorción y dispersión

- Microscópicamente, cuando un átomo aislado absorbe un fotón, un electrón, usualmente uno de los más exteriores, es excitada a un nivel superior. La diferencia en energía entre los niveles es dada por la relación de Planck,  $\Delta E = h\nu$ .
  - Si  $\Delta E$  es menor que la energía de ionización, el átomo queda excitado.
  - Si  $\Delta E$  es mayor que la energía de ionización, el átomo queda ionizado y el electrón libre.

Figure 5.5. Excitation and decay processes between quantum states. At extreme left, an electron initially in level  $E_i$  absorbs a photon ( $h\nu$ ) and is excited to level  $E_f$ . Subsequent decays (a, d) and excitation (b, c) processes are described in the text.



- Existen varias posibilidades para el átomo excitado:
  - El átomo puede regresar a su estado inicial casi inmediatamente (una escala de tiempo típico es del orden de  $10^{-6}$  segundos). En este caso, el fotón resulta redirigido, sin cambio de energía. Consideramos esta opción un caso de dispersión. (**caso a**, ver figura)
  - Si la densidad de fotones es alta, el átomo puede absorber otro fotón y así excitar un nivel aun más alto o resultar ionizado. (**caso b**)
  - Si las colisiones entre átomos son frecuentes, la energía de excitación puede ser total o parcialmente transferida a otros átomos. En este caso, la energía cinética del material aumenta y el átomo originalmente excitado puede quedarse en otro estado excitado (de menor energía). Consideramos esta opción un caso de absorción. (**caso c**)
  - Si existen niveles entre el nivel inicial y el nivel excitado, el átomo puede decaer emitiendo varios fotones de menor energía. En este caso, el material emite toda la energía absorbida, pero cambia la naturaleza del campo radiativo. (**caso d**)
- En los casos (b)-(d), la naturaleza del campo radiativo puede resultar diferente después de la absorción del fotón (o los fotones). Adicionalmente, colisiones entre átomos pueden convertir energía cinética para excitar un electrón en uno de los átomos que luego decae por uno de los procesos (a)-(d), de nuevo cambiando el campo radiativo. En el caso extremo, los fotones emitidos no tienen ninguna relación con los absorbidos, salvo la condición estadística de la conservación de energía total (equilibrio estadístico).
- Por esta razón, antes dividimos la absorción,  $k_{\omega}$ , en dos partes, una para absorción pura y la otra para dispersión pura,  $k_v^a$  y  $k_v^s$ , respectivamente
 
$$k_v = k_v^a + k_v^s \text{ cm}^{-1}.$$

- Igualmente, se puede expresar el coeficiente de emisividad,  $j'_v$ , como la suma de dos partes debido a emisión y dispersión pura,  $j_v^e$  y  $j_v^s$ , respectivamente

$$j'_v = j_v^e + j_v^s \text{ erg/s/cm}^3/\text{Hz}.$$

- Supondremos que la radiación es dispersada isotrópicamente. (Esto generalmente NO es el caso, pero es una complicación severa y contraria las suposiciones que hemos adoptado hasta ahora. Normalmente, el ángulo  $\phi$  entre la dirección de emisión depende de la dirección de incidencia vía una función de redistribución,

$$f(\phi) = f(\Omega \cdot \Omega'),$$

donde  $\Omega$  y  $\Omega'$  son las direcciones de incidencia y emisión, respectivamente.)

- La energía absorbida de un rayo en la dirección  $(\theta, \phi)$  por dispersión es

$$k_v^s I_v(\theta, \phi) d\Omega \text{ erg/s/cm}^3/\text{Hz},$$

donde  $d\Omega$  es la unidad de ángulo sólido. Entonces, la energía absorbida por unidad de volumen se obtiene promediando sobre el ángulo sólido y resulta

$$k_v^s J_v \text{ erg/s/cm}^3/\text{Hz},$$

donde  $J_v$  es la intensidad promedia.

- Esta energía es emitida isotrópicamente (por suposición) y es

$$j_v^s = k_v^s J_v \text{ erg/s/cm}^3/\text{Hz}.$$

- Como resultado, en el caso de dispersión pura, la función de fuente es

$$S_v = \frac{j_v^s}{k_v^s} = J_v. \quad (48)$$

- En el otro caso extremo, de absorción y emisión pura, la función de fuente es

$$S_v = \frac{j_v^e}{k_v^a},$$

lo cual depende solamente de las propiedades de la materia y no del campo radiativo.

- Si consideramos un volumen en equilibrio termodinámico, la intensidad promedia del campo radiativo es  $B_v(T)$ , así que la energía absorbida por unidad de volumen será

$$k_v^a B_v(T) \text{ erg/s/cm}^3/\text{Hz}$$

mientras que la energía emitida por unidad de volumen será (por definición)

$$j_v^e \text{ erg/s/cm}^3/\text{Hz}$$

y será igual a la energía absorbida (el equilibrio termodinámico impone la igualdad de las energías absorbida y emitida).

Como resultado, la función de fuente resulta

$$S_v = \frac{j_v^e}{k_v^a} = B_v(T) \quad (49)$$

en el caso de emisión y absorción pura.

- En el caso general, la función de fuente es

$$S_v = \frac{j_v^e + j_v^s}{k_v^a + k_v^s} = \frac{k_v^a B_v(T) + k_v^s J_v}{k_v^a + k_v^s} = \frac{k_v^a}{k_v^a + k_v^s} B_v(T) + \frac{k_v^s}{k_v^a + k_v^s} J_v = B_v(T) + (1 - \lambda_v) J_v \quad (50)$$

donde  $\lambda_v$  es el cociente de la absorción total con respecto a la absorción total.

- Lo anterior nos permite estimar el tiempo necesario para que un campo radiativo arbitrario se acerca a la distribución de Planck,  $B_v(T)$ . Adoptamos la ecuación de transferencia de la radiación,



$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} = -k_\nu I_\nu + j_\nu = -\lambda_\nu k_\nu (I_\nu - B_\nu(T))$$

lo cual podemos integrar para obtener

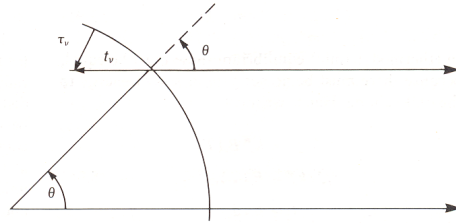
$$I_\nu = \exp(-\lambda_\nu k_\nu t c) I_\nu(0) + (1 - \exp(-\lambda_\nu k_\nu t c)) B_\nu(T) . \quad (51)$$

Entonces, para tiempos  $t \gg (\lambda_\nu k_\nu c)^{-1}$ , el espectro inicial se habrá acercado a la distribución de Planck.

## La radiación en la atmósfera solar

- El sol es la única estrella donde distinguimos muy bien el disco estelar. (Los otros casos donde tenemos algo de información al respecto son ciertas estrellas binarias eclipsantes y estrellas gigantes muy cercanas que se pueden resolver hoy en día con interferómetros, como Betelgeus en Orion, por ejemplo.) De fotos del sol, sabemos que el centro del disco es más brillante que la orilla.

**Figure 5.6.** Limb darkening: variation in optical depth because of the curvature of the solar disk. The optical depth  $\tau_\nu$  is measured normal to the solar surface, where  $t_\nu$  is measured along the line of sight.



- Cuando observamos un punto del disco solar, vemos la radiación emergente a un ángulo  $\theta$  de la normal. Por lo tanto, la variación de la intensidad entre el centro y la orilla del disco solar es equivalente a la variación angular de la intensidad,  $I_\nu(\theta)$ , lo cual nos permite estudiar tanto la variación en frecuencia así como la variación en ángulo  $\theta$  de la normal. (Esto supone que ignoramos variaciones en el brillo en la superficie, como ocurren en manchas solares, etc..)
- De la solución formal de la ecuación de la transferencia de la radiación (19), sabemos que la radiación emergente es dada por

$$I_\nu(\tau'_\nu = 0) = I_\nu(\tau_{\max}) e^{-\tau_{\max}} + \int_0^{\tau_{\max}} S_\nu(\tau'_\nu) e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu ,$$

donde  $\tau'_\nu$  es la profundidad óptica medida a lo largo de la línea de vista. Dada que la radiación origina en el centro de la estrella a una profundidad óptica enorme, podemos suponer  $\tau_{\max} = \infty$ , lo cual implica que el primer término no contribuye.

- Si transformamos para medir  $\tau_\nu$ , la profundidad óptica a lo largo de la dirección normal a la superficie (paralelo a la dirección radial en la estrella), según  $d\tau'_\nu \cos\theta = d\tau_\nu$ , obtenemos

$$I_\nu(0, \theta) = \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu \sec\theta} \sec\theta d\tau_\nu . \quad (52)$$

- Vemos que la intensidad emergente es la función de fuente pesada por un exponencial.
- Generalmente, la función de fuente aumentará con la temperatura de la materia o, de manera equivalente, cuando aumente la profundidad óptica. Si adoptamos una forma

lineal,

$$S_v = a + b\tau_v \quad (53)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} I_v(0, \mu) &= \int_0^{\infty} (a + b\tau_v) e^{-\tau_v/\cos\theta} \frac{d\tau_v}{\cos\theta} \\ &= \int_0^{\infty} (a + b\tau'_v \mu) e^{-\tau'_v} d\tau'_v \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-\tau'_v} d\tau'_v + b\mu \int_0^{\infty} \tau'_v e^{-\tau'_v} d\tau'_v = a + b\mu \end{aligned} \quad (54)$$

donde utilizamos  $\mu = \cos\theta$  y  $d\tau'_v \cos\theta = d\tau_v$ , la relación entre las profundidades ópticas en las direcciones radiales y a lo largo de la línea de vista.

- La relación entre el brillo a un ángulo  $\theta$  y el brillo en el centro del disco se conoce como la ley de “limb darkening”

$$\frac{I_v(\cos\theta)}{I_v(0)} = \frac{a + b\cos\theta}{a + b} = 1 - \beta + \beta\cos\theta, \quad (55)$$

donde

$$\beta = \frac{b}{a + b}.$$

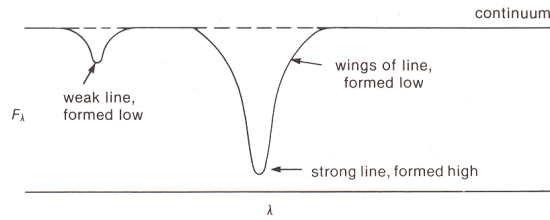
- Si suponemos LTE (ecuación 49), una opacidad promedia y que observamos en luz integrada (sobre todas las frecuencias), tenemos

$$S = B(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi} = \frac{3\sigma}{4\pi} T_{ef}^4 \left( \tau + \frac{2}{3} \right), \quad (56)$$

que es de la forma  $a + b\tau$  (ecuación 53), de lo cual deducimos que

$$\beta = \frac{b}{a + b} = \left( 1 + \frac{2}{3} \right)^{-1} = 0.6 \quad \text{y} \quad \frac{I_v(\cos\theta)}{I_v(0)} = 0.4 + 0.6\cos\theta.$$

- Aunque es evidente de la ecuación (52) que la radiación es pesada por todas las profundidades ópticas, es conveniente pensar que viene de una profundidad óptica nominal, como  $\tau = 2/3$  (ecuación 56).
- En particular, sin consideramos la profundidad física asociada con esta profundidad óptica nominal, nos permite entender las profundidades en la atmósfera en las cuales se forman distintas partes del espectro observado.
  - Para frecuencias donde la opacidad es alta, se alcanza la profundidad óptica nominal muy alto en la atmósfera (muy cercano a la superficie) donde la temperatura es más baja y la función de fuente tiene un valor más bajo también.
  - Para frecuencias donde la opacidad es baja, se alcanza la misma profundidad óptica nominal solamente en capas mucho más profundas en la atmósfera donde la temperatura es más alto y la función de fuente tiene un valor más alto.



**Figure 5.8.** Absorption line profiles arising in stellar atmosphere (schematic). Weak lines (left) are formed deeper in the atmosphere than are strong lines (right). The wings are formed deep in the atmosphere; line centers form in upper layers.

- Lo anterior nos permite entender la apariencia de líneas de absorción. Donde la opacidad es menor, las capas involucradas son más calientes y tienen mayor brillo mientras que las capas donde la opacidad es mayor son menos calientes y tienen menor brillo. Naturalmente, entonces, las líneas de absorción tienen menos flujo que las frecuencias cercanas donde la opacidad es menor.
- Podemos también aplicar este razonamiento a la variación de opacidad dentro de una línea de absorción. El centro de la línea se forma a una profundidad física menor a las profundidades donde se forman las alas de la línea. Por lo tanto, la forma de la línea de absorción nos informa de la variación de la temperatura dentro de la atmósfera.
- De la misma manera, líneas de absorción débiles se forman mayores profundidades en la atmósfera que líneas fuertes, porque se requiere una trayectoria más larga para alcanzar la misma profundidad óptica.
- El continuo es la parte más brillante del espectro. Naturalmente, se forma lo más profundamente en la atmósfera donde se alcanzan las temperaturas más altas.
- Finalmente, en el caso de “limb darkening” en el sol, aunque vemos hasta la misma profundidad óptica en cada punto angular, esta profundidad óptica corresponde a distintas profundidades físicas a distintos ángulos. Como resultado, conforme aumenta el ángulo, vemos menos profundo en la atmósfera y, por lo tanto, vemos capas a menor temperatura cuyos brillos son menores, lo cual explica la disminución del brillo hacia la orilla del disco solar.

## ***El transporte no radiativa de energía***

### **Convección**

- Se puede expresar la ecuación de transferencia de radiación (ecuación 32) como
 
$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\bar{k}}{16\pi ac} \frac{L(r)}{r^2 T^3}, \quad (57)$$
 donde  $a$  es el constante de radiación.
- Esencialmente, esta ecuación implica que un cierto gradiente de temperatura es necesario para transferir la luminosidad  $L(r)$ .
- En particular, el gradiente de temperatura depende de la opacidad. Si la opacidad es muy alta, requerirá un fuerte gradiente de temperatura para transferir la luminosidad únicamente por medio de la radiación.
- Gradientes de temperatura muy fuertes pueden resultar inestables. Para ver esto, consideramos una parcela de material con presión y densidad inicial  $P_I$  y  $\rho_I$ . Suponemos que sube adiabáticamente dentro de la estrella, es decir, que sube sin

ganancia o pérdida de energía. Después de esto, su presión y densidad serán  $P_2$  y  $\rho_2$ , donde

$$P_1 \rho_1^{-\gamma} = P_2 \rho_2^{-\gamma}$$

y  $\gamma = c_p/c_v$ , el cociente de las capacidades de calor a presión constante y volumen constante. La presión se mantiene en equilibrio con el ambiente porque la escala de tiempo para establecer este equilibrio es muy corto (vimos antes que es del orden de media hora para establecerlo a escala global en el Sol).

- Si la densidad de la parcela es menor a la densidad del ambiente, seguirá subiendo debido a la fuerza de flotabilidad. La fuerza de flotabilidad por unidad de volumen para una fluctuación de densidad  $\Delta\rho$  en un campo gravitatorio  $g$  es

$$f = -g\Delta\rho .$$

- Como consecuencia, si el gradiente en densidad es menor que el cambio en densidad cuando una parcela sube adiabáticamente, la estrella será inestable para la convección.
- Otra manera de expresar esto es lo siguiente. Dado que se mantiene el equilibrio de la presión, al subir adiabáticamente, la parcela sufre un cambio de temperatura igual al gradiente adiabático. Entonces, si el gradiente en temperatura real excede el gradiente adiabático, la estrella será inestable contra la convección.
- Entonces, habrá convección si

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{rad} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad} \quad \text{o} \quad \left| \frac{d \ln T}{dr} \right|_{rad} > \left| \frac{d \ln T}{dr} \right|_{ad} .$$

Si dividimos el último resultado por

$$\frac{d \ln P}{dr} ,$$

obtenemos

$$\left| \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_{rad} > \left| \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_{ad} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \left| \frac{d \ln P}{d \ln T} \right|_{rad} < \left| \frac{d \ln P}{d \ln T} \right|_{ad} . \quad (58)$$

- El resultado (58) es útil en combinación con la relación adiabática,

$$PT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{constante} ,$$

de lo cual podemos derivar

$$\left| \frac{d \ln P}{d \ln T} \right|_{ad} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

y nos permite expresar la condición para inestabilidad como

$$\left| \frac{d \ln P}{d \ln T} \right|_{rad} < \frac{\gamma}{\gamma - 1} . \quad (59)$$

- Por lo tanto, el cociente de capacidades de calor,  $\gamma$ , es una cantidad de suma importancia en determinar la estabilidad de una estrella contra la convección. Según las ecuaciones (57) y (59), la convección es probable cuando
  - la opacidad es alta
  - la luminosidad es alta mientras el radio es pequeño
  - $\gamma$  se acerca a 1.0 (implica un índice politrópico alto)
- Para un gas ideal

$$c_p - c_v = \frac{k}{\mu m_H} , \quad (60)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann y

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{c_p}{c_p - c_v} = \frac{c_p}{k} \mu m_H \quad (61)$$

lo cual indica que la estrella es inestable contra la convección cuando la capacidad de calor a presión constante es alta.

- Es también instructivo determinar el gradiente adiabático físico. Empezamos con la ecuación adiabática

$$PT^{\gamma/(1-\gamma)} = K' \quad \text{o} \quad P = KT^{n+1} \quad (62)$$

usando la relación

$$n = \frac{1}{\gamma-1}$$

y donde  $K$  es un constante. Para un gas ideal, derivamos

$$\rho = \frac{K \mu m_H}{k} T^n \quad (63)$$

Si ahora sustituimos lo anterior en la ecuación de equilibrio hidroestático,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{m(r)G}{r^2} \rho \quad (64)$$

obtenemos

$$K(n+1)T^n \frac{dT}{dr} = -\frac{m(r)G}{r^2} \frac{\mu m_H}{k} KT^n$$

lo cual simplificamos para obtener

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} &= -\frac{\mu m_H}{k} \frac{g}{n+1} \\ &= -\frac{\mu m_H g}{k} \frac{\gamma-1}{\gamma} \\ &= -\frac{\mu m_H g}{k} \frac{c_p - c_v}{c_p} \\ &= -\frac{g}{c_p} \end{aligned} \quad (65)$$

En el resultado anterior, el gradiente de temperatura es el gradiente adiabático porque utilizamos la ecuación adiabática entre la temperatura y presión. De nuevo, vemos que una alta capacidad de calor a presión constante favorece la inestabilidad convectiva por disminuir el gradiente de temperatura adiabática.

- Podemos también derivar la luminosidad máxima que puede transportar la radiación si igualamos las expresiones para los gradientes de temperatura adiabática y radiativa (las ecuaciones 65 y 57, respectivamente) y utilizamos

$$\bar{k} = \bar{\kappa} \rho \quad \text{y} \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{c_p}{k} \mu m_H$$

para introducir la densidad y la capacidad de calor a presión constante, respectivamente, obtenemos

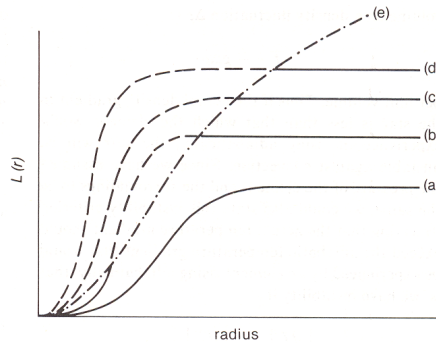
$$L_{\max}(r) = \frac{16\pi ac}{3\bar{\kappa}} \frac{1}{c_p} \frac{T^3}{\rho} m(r)G \quad (66)$$

De este resultado, es evidente el papel que juegan tanto la opacidad así como la

capacidad de calor a presión constante en deprimir la luminosidad que puede transferir la radiación.

- La siguiente gráfica presenta varias relaciones entre la luminosidad en función del radio (curvas a-d) así como la luminosidad máxima que puede transferir la radiación (curva e).
  - El caso (a) representa una estrella enteramente radiativa.
  - El caso (b) representa una estrella donde la parte interior del núcleo y la parte exterior del envolvente son radiativos, pero donde las partes intermedias son convectivas.
  - Los casos (c) y (d) tienen núcleos y la parte interna del envolvente convectivas mientras que la parte externa del envolvente es radiativa.

Figure 5.9. Luminosity versus radius (a – d) and the maximum luminosity versus radius that can be sustained by radiative transport (curve e). Dashed segments correspond to regions that are convectively unstable.



- La inestabilidad contra la convección requiere que el gradiente de temperatura excede el gradiente adiabático. Esta diferencia se conoce como el gradiente superadiabático y es definido según

$$\frac{d\Delta T}{dr} \equiv \frac{dT}{dr} - \left( \frac{dT}{dr} \right)_{ad} \quad (67)$$

- En principio, dada la suposición de movimiento adiabático de las parcelas en lo anterior, es decir, sin ganar ni perder energía, la convección debe transportar la gran mayoría de la energía. Afortunadamente, en los interiores estelares, la convección es muy eficiente y, cuando ocurre, podemos despreciar el transporte de energía por radiación. En parte esto tiene que ver con las distancias y las escalas temporales sobre la cual opera la convección. Desafortunadamente, en las atmósferas estelares, la convección es menos eficiente y no cumple tan bien la condición de movimiento adiabático.
- La teoría de convección que funciona adecuadamente en los interiores estelares es la teoría “mixing-length”. En este modelo, las parcelas se desplazan sobre una escala típica  $\Lambda(r)$  al radio  $r$ . El movimiento de una parcela provoca el crecimiento inestable de irregularidades en la forma de la parcela, lo cual resulta en su disipación en su entorno sobre la escala  $\Lambda(r)$  como indica la siguiente figura.
- Claramente, en una zona de convección, la densidad y temperatura dependen del ángulo. No obstante, se puede definir valores promedios sobre la zona de altura  $\Lambda(r)$ .

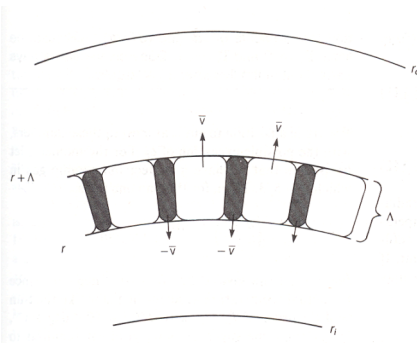


Figure 5.10. Shell of convectively unstable elements at  $r$  in a convective zone of inner radius  $r_i$  and outer radius  $r_o$ . The velocity of the elements (averaged over  $\Delta$ ) is  $\bar{v}$ . The shaded elements are sinking; the open elements are rising.

- Si una parcela sube, tiene que ser menos denso que su entorno y tener una temperatura más alta dado que  $P \sim \rho T$  y que la presión se mantendrá en equilibrio. Por lo tanto, transporte energía hacia afuera.
- Podemos estimar la escala temporal para la convección. Si una parcela tiene un exceso de temperatura  $\Delta T$ , tendrá un déficit de densidad de

$$\Delta\rho = -\frac{\rho}{T}\Delta T .$$

Esta parcela sentirá una fuerza de flotación

$$f = -g\Delta\rho = \frac{g\rho}{T}\Delta T .$$

Por lo tanto, su ecuación de movimiento será

$$\frac{d^2r}{dt^2} = g \frac{\Delta T}{T} . \quad (68)$$

Si adoptamos números típicos para el interior solar:  $g = 0.5g_\odot$  (superficie)  $= 10^4 \text{ cm/s}^2$ ,  $T \sim 10^7 \text{ K}$ , suponemos  $\Delta T \sim 1 \text{ K}$ , entonces el tiempo que tardará una parcela en subir una fracción  $\alpha$  del radio solar (suponemos  $\alpha R_\odot = \Lambda(r)$ ) es del orden

$$t \sim \left( \frac{\alpha R_\odot T}{g \Delta T} \right)^{0.5} \approx \alpha^{0.5} \times 10^7 \text{ s} \approx \frac{\alpha^{0.5}}{3} \text{ años} . \quad (69)$$

Aunque no se conoce el valor de  $\alpha$  muy bien, un valor  $\alpha = 0.1$  debería ser razonable, lo cual implica que la escala de tiempo para la convección es del orden de un mes.

- Es instructivo comparar esta escala de tiempo con el tiempo para la difusión radiativa. En el interior del sol, la trayectoria media libre de un fotón,  $\lambda$ , es del orden de 1 cm. Dado que el desplazamiento para movimiento browniano es

$$N^{0.5}\lambda$$

donde  $N$  es el número de interacciones del fotón, la distancia viajado por el fotón es  $(\alpha R_\odot)^2 = 4.9 \times 10^{19} \text{ cm}$ .

Por lo tanto, el tiempo que tardará un fotón en hacer este recorrido es de  $1.6 \times 10^9 \text{ s}$ , que es un factor de 500 mayor a la escala de tiempo para la convección.

- Dada la diferencia anterior, es evidente que, cuando sucede la convección, el transporte de energía por radiación es despreciable en comparación con el transporte de energía por convección.
- El flujo de energía transportado por la convección es el producto del flujo de masa,

$$\frac{1}{2} \rho \bar{v} ,$$

donde el factor de mitad se debe a que solamente la mitad de la masa se desplaza

hacia afuera y  $\bar{v}$  es la velocidad promedio de las parcelas, y el exceso de energía por unidad de masa transportado por las parcelas,

$$c_p \Delta T$$

o sea

$$F_{conv} = \frac{1}{2} \rho \bar{v} c_p \Delta T \text{ erg/s/cm}^2. \quad (70)$$

Una aproximación para  $\bar{v}$  es  $\alpha R_\odot$  dividido por la escala de tiempo para convección (ecuación 69), lo que implica

$$F_{conv} = \frac{1}{2} \left( \alpha R_\odot g \frac{\Delta T}{T} \right)^{0.5} \rho c_p \Delta T \text{ erg/s/cm}^2.$$

Igualmente, podemos aproximar el gradiente superadiabático con

$$\frac{d\Delta T}{dr} = \frac{\Delta T}{\alpha R_\odot},$$

lo cual nos permite expresar el flujo convectivo como

$$F_{conv} = \frac{1}{2} \left( \frac{g}{T} \right)^{0.5} (\alpha R_\odot)^2 \rho c_p \left( \frac{d\Delta T}{dr} \right)^{1.5} \text{ erg/s/cm}^2. \quad (71)$$

- La expresión anterior nos permite estimar el gradiente superadiabático necesario para transportar la totalidad de la energía (ningún transporte de energía por radiación). Obtenemos esta estimación vía

$$F_{conv} = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$$

lo cual implica

$$L(r) = \frac{4\pi r^2}{2} \left( \frac{g}{T} \right)^{0.5} (\alpha R_\odot)^2 \rho c_p \left( \frac{d\Delta T}{dr} \right)^{1.5}. \quad (72)$$

Si adoptamos los valores anteriores para  $g$ ,  $T$  y  $\alpha$ ,  $r = 0.5R_\odot$ ,  $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$ ,  $L(r) = L_\odot$

y

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} \quad \text{con} \quad c_v = 1.25 \times 10^8 \text{ erg/g/K} \quad (\text{cap. 2, Bowers \& Deeming})$$

obtenemos

$$\frac{d\Delta T}{dr} \approx 8.5 \times 10^{-11} \text{ K/cm}. \quad (73)$$

En comparación, si adoptamos las mismas cifras en la ecuación (65), obtenemos

$$\left( \frac{dT}{dr} \right)_{ad} = -\frac{g}{c_p} = -\frac{10^4}{2.1 \times 10^8} = -4.8 \times 10^{-5} \text{ K/cm}. \quad (74)$$

Por lo tanto, el gradiente superadiabático difiere del gradiente global por solamente una parte en un millón.

- Lo anterior indica que el gradiente de temperatura nunca difiere mucho del gradiente adiabático, aun si se transporta la totalidad de la energía por convección.
- Entonces, es una buena aproximación suponer que, si sucede la convección en los interiores estelares, el gradiente de temperatura será igual al gradiente adiabático.



## Conducción

- La conductividad térmica de un medio,  $\lambda_c$ , está definida por la ecuación

$$\text{flujo de calor} = \lambda_c \frac{dT}{dr} \quad \text{o} \quad F_{cond} = -\lambda_c \nabla T . \quad (75)$$

$\lambda_c$  tiene unidades de  $\text{erg/s/cm}^2/(\text{K/cm})$

- Normalmente, la conductividad térmica del material es despreciable en comparación con su conductividad radiativa, por lo tanto la energía se transporta por radiación, pero puede llegar a ser importante en material muy denso, como son los núcleos de estrellas muy evolucionadas.

## Circulación (meridional)

- En una estrella en rotación o en estrellas binarias, las superficies equipotenciales no tienen simetría esférica. En este caso, la temperatura es constante en las superficies equipotenciales, lo que implica que la temperatura es función del ángulo polar,  $\phi$ ,  $T = T(\phi)$  (capítulo anterior).

- Para un cuerpo negro (precursor a la ecuación 32 y utilizando la coordenada radial),

$$\pi F = -\frac{4ac}{3k} T^3 \frac{dT}{dr} . \quad (76)$$

- En el caso de que  $T = T(\phi)$ , la ecuación anterior deviene

$$\pi F = -\frac{4ac}{3k} T^3 \frac{dT}{d\phi} \frac{d\phi}{dr} \quad \text{o} \quad \pi F = \pi f(\phi) \nabla \phi , \quad (77)$$

donde  $f(\phi)$  es una función únicamente del ángulo polar.

- Para el equilibrio radiativo en una región sin producción de energía, tenemos

$$\nabla \cdot F = 0 , \quad (78)$$

pero la ecuación (77) indica que

$$\nabla \cdot F = \frac{df}{d\phi} |\nabla \phi|^2 + f(\phi) \nabla^2 \phi . \quad (79)$$

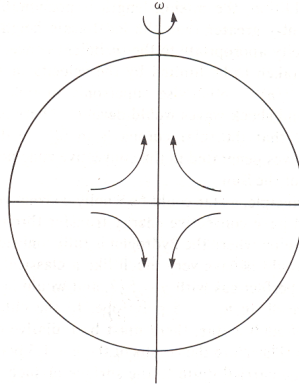
- Para un potencial gravitatorio, esféricamente simétrico o no, aplica la ley de Poisson  $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$  .

Si el potencial se debe a rotación uniforme, sabemos igualmente

$$\nabla^2 \phi = -2\omega^2 = \text{constante} .$$

En ambos casos,  $\nabla^2 \phi$  es un constante en superficies equipotenciales.

- Por otra parte, si  $\nabla^2 \phi$  es constante en las superficies equipotenciales, no hay garantía que  $\nabla \phi$  será constante en estas superficies equipotenciales y, en general, no lo será. Por lo tanto, en general, no será posible satisfacer la ecuación (78) localmente, aunque sí globalmente.
- Como consecuencia, en las direcciones donde el gradiente de temperatura es mayor (hacia los polos para rotación), el flujo de radiación será mayor. Esto provocará que este material se calienta más que el material circundante, bajando su densidad e iniciando un flujo hacia afuera del material en estas direcciones. En contraste, donde el gradiente de temperatura es menor, el flujo de radiación y el calentamiento resultante serán menores, la densidad aumentará y este material caerá hacia adentro. La suma de estos efectos producirá un flujo global de material dentro de la estrella como indica la siguiente figura (el caso de rotación).



**Figure 5.11.** Meridional circulation in a rotating star. Material sinks along the equator and rises along the rotation axis.

- Si esta circulación meridional es importante, provocará la redistribución de la materia a nivel global en la estrella. Esto tiene el potencial de modificar la evolución de las estrellas, porque el proceso normal durante la evolución de una estrella es el de establecer gradientes de abundancias, las cuales influyen de manera importante en la estructura y evolución de las estrellas. Si se modifican o se borran, implicaría diferencias importantes para la estructura y evolución de estrellas con y sin rotación.
- En realidad, las estrellas generalmente parecen rotar diferencialmente, es decir, con diferentes velocidades a distintas distancias del eje de rotación. Esto perjudica el proceso de establecer la circulación meridional, aunque es probable que no lo impide por completo.
- Es importante reconocer que casi todas las estrellas rotan. Probablemente, aun las que no parecen rotar rotan y solamente parecen no hacerlo por nuestra línea de vista (hacia sus polos). También, una gran parte de nuestras mediciones de masas y radios estelares provienen de estrellas en sistemas binarios. Potencialmente, estos efectos implican sesgos o defectos en nuestro entendimiento de la estructura y evolución estelar. No obstante, modelos sin rotación (hay muy pocos que lo incluyen, aun hoy en día) reproducen muy exitosamente muchos detalles que observamos en estrellas, así que hay esperanza que nuestro conocimiento no es muy lejos de la realidad.